

# Exercices corrigés – Probabilités conditionnelles

## Exercice 1

### Partie A

On rappelle que le triathlon est une discipline qui comporte trois sports : la natation, le cyclisme et la course à pied.

Fabien s'entraîne tous les jours pour un triathlon et organise son entraînement de la façon suivante :

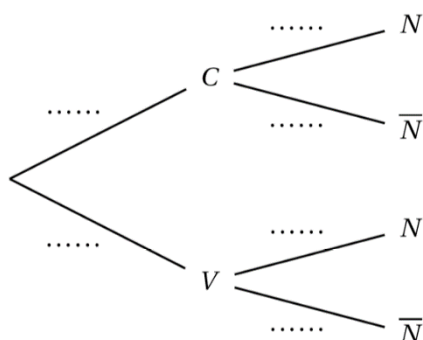
- chaque entraînement est composé d'un ou deux sports et commence toujours par une séance de course à pied ou de vélo ;
- lorsqu'il commence par une séance de course à pied, il enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de 0,4 ;
- lorsqu'il commence par une séance de vélo, il enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de 0,8.

Un jour d'entraînement, la probabilité que Fabien pratique une séance de vélo est de 0,3.

On note :

- $C$  l'évènement : « Fabien commence par une séance de course à pied » ;
- $V$  l'évènement : « Fabien commence par une séance de vélo » ;
- $N$  l'évènement : « Fabien enchaîne par une séance de natation ».

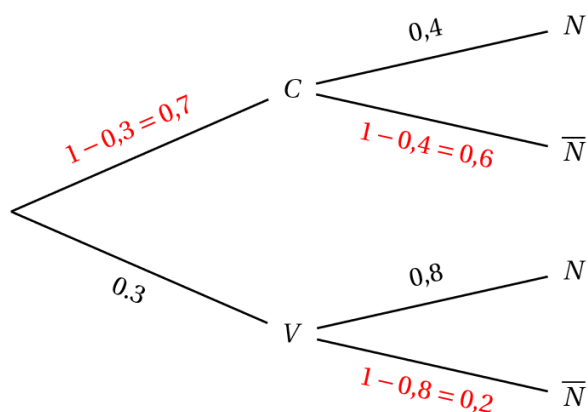
1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant représentant la situation :



2. Quelle est la probabilité que Fabien commence par une séance de course à pied et enchaîne par une séance de natation ?
3. Démontrer que :  $P(N) = 0,52$ .
4. Sachant que Fabien n'a pas fait de séance de natation, quelle est la probabilité qu'il ait commencé son entraînement par une séance de vélo ?

### Correction :

1. L'arbre de probabilité correspond à la situation est :



2. Déterminons  $P(C \cap N)$ . En utilisant les formules des probabilités conditionnelles,

$$P(C \cap N) = P_C(N) \times P(C) = 0,7 \times 0,4 = 0,28.$$

3. En utilisant la formule des probabilités totales,

$$P(N) = P(C \cap N) + P(V \cap N) = P(C) \times P_C(N) + P(V) \times P_V(N) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,8 = 0,28 + 0,24 = 0,52.$$

4. On veut calculer  $P_{\bar{N}}(V)$ . En utilisant la formule de Bayes,

$$P_{\bar{N}}(V) = \frac{P(\bar{N} \cap V)}{P(\bar{N})} = \frac{0,3 \times 0,2}{1 - 0,52} = 0,125$$

## Exercice 2

Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode code secret (quel que soit le montant de la transaction).

Il remarque que :

- 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux :
  - 40 % paient en espèces;
  - 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact;
  - les autres paient avec une carte bancaire en mode code secret.
- 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux :
  - 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret;
  - les autres paient en espèces.

On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique.

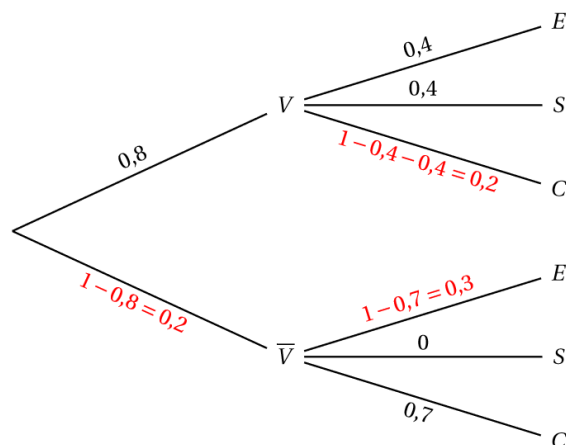
On considère les évènements suivants :

- $V$  : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € »;
- $E$  : « pour son achat, le client a réglé en espèces »;
- $C$  : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret »;
- $S$  : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».

1. a. Donner la probabilité de l'évènement  $V$ , notée  $P(V)$ , ainsi que la probabilité de  $S$  sachant  $V$  notée  $P_V(S)$ .
- b. Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Calculer la probabilité que pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact.
- b. Montrer que la probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » est égale à 0,62.

## Correction :

1. a. D'après le texte, 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €, donc  $P(V) = 0,8$ .  
D'après le texte, parmi ces 80 % qui règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €, 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact; donc  $P_V(S) = 0,4$ .
- b. On traduit la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré :



2. a. Pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et il a utilisé sa carte bancaire en mode sans contact est l'événement  $V \cap S$  :

$$P(V \cap S) = P(V) \times P_V(S) = 0,8 \times 0,4 = 0,32.$$

- b. Pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes, est l'événement  $C \cup S$ ; les événements  $C$  et  $S$  étant incompatibles,  $P(C \cup S) = P(C) + P(S)$ .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C) = P(V) \times P_V(C) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(C) = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,7 = 0,3$$

$$P(S) = P(V \cap S) + P(\bar{V} \cap S) = P(V) \times P_V(S) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(S) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0 = 0,32$$

On a donc  $P(C \cup S) = P(C) + P(S) = 0,3 + 0,32 = 0,62$ .

*Remarque* - On aurait pu obtenir la probabilité demandée en passant par l'événement contraire : « payer en espèces ».

### Exercice 3

On dispose des renseignements suivants à propos du baccalauréat session 2015 :

- 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général, 20 % un baccalauréat technologique et les autres un baccalauréat professionnel ;
- 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus ainsi que 90,6 % des candidats au baccalauréat technologique.

*Source : DEPP (juillet 2015)*

On choisit au hasard un candidat au baccalauréat de la session 2015 et on considère les évènements suivants :

- $G$  : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat général » ;
- $T$  : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat technologique » ;
- $S$  : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel » ;
- $R$  : « Le candidat a été reçu ».

Pour tout évènement  $A$ , on note  $P(A)$  sa probabilité et  $\bar{A}$  son évènement contraire.

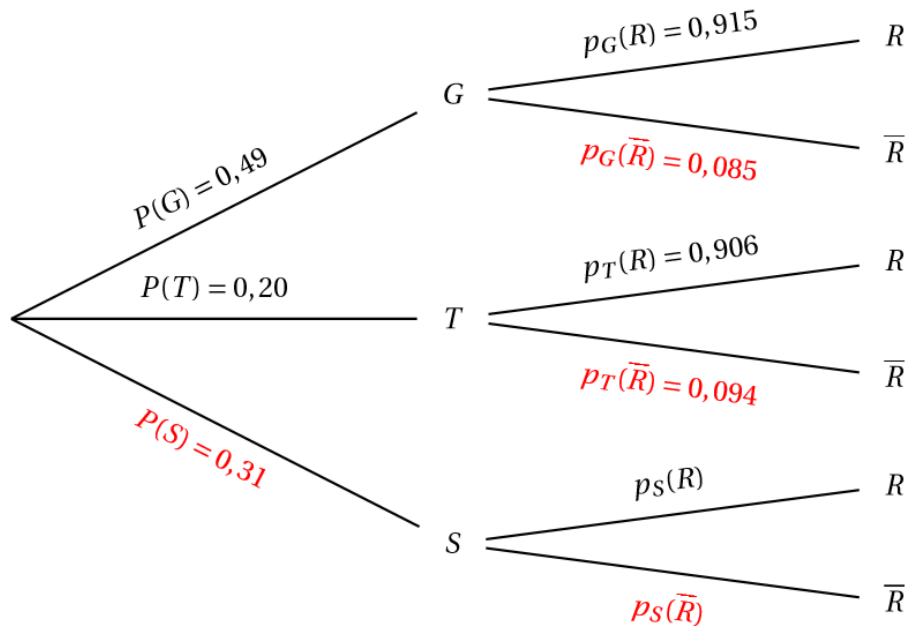
De plus, si  $B$  est un autre évènement, on note  $P_B(A)$  la probabilité de  $A$  sachant  $B$ .

1. Préciser les probabilités  $P(G)$ ,  $P(T)$ ,  $P_T(R)$  et  $P_G(R)$ .
2. Traduire la situation par un arbre pondéré. On indiquera les probabilités trouvées à la question précédente. Cet arbre pourra être complété par la suite.
3. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est égale à 0,181 2.
4. Le ministère de l'Éducation Nationale a annoncé un taux global de réussite pour cette session de 87,8 % pour l'ensemble des candidats présentant l'un des baccalauréats.
  - a. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat professionnel et l'ait obtenu est égale à 0,248 45.
  - b. Sachant que le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel, déterminer la probabilité qu'il ait été reçu. On donnera une valeur approchée du résultat au millième.

Correction :

1. En utilisant les données du texte, on a ;  $P(G) = 0,49$ ,  $P(T) = 0,20$ ,  $P_T(R) = 0,906$  et  $P_G(R) = 0,915$ .
2. On peut donc construire l'arbre de probabilités (voir page 3).
3. On cherche  $P(T \cap R)$  :  $P(T \cap R) = P(T) \times P_T(R) = 0,20 \times 0,906 = 0,1812$
4. a. On a  $p(R) = 0,878$  et d'après les probabilités totales, comme  $G$ ,  $T$  et  $S$  forment une partition de l'univers :
 
$$P(R) = P(G \cap R) + P(T \cap R) + p(S \cap R)$$

$$= 0,49 \times 0,915 + 0,2 \times 0,906 + p(S \cap R) = 0,878$$
 On aura alors :  $p(S \cap R) = 0,878 - (0,49 \times 0,915 + 0,2 \times 0,906) = 0,24845$ .
- b. On cherche  $P_S(R)$  :  $P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{p(S)} = \frac{0,24845}{0,31} \approx 0,801$



### Exercice 4

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae ... dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- $R$  l'évènement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- $F$  l'évènement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

1. Calculer  $p(R)$ , la probabilité de l'évènement  $R$ .
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les évènements  $R$  et  $F$ .
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5 % sont interprétées en français.  
Montrer que  $p(F \cap \bar{R}) = 0,28$ .
5. En déduire  $p_{\bar{R}}(F)$  et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

Correction :

1. Une chanson est choisie au hasard et de façon équiprobable donc :  $p(R) = \frac{960}{3200} = 0,3$ .
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français donc :  $p_R(F) = \frac{35}{100} = 0,35$ .
3.  $p(R \cap F) = p(R) \times p_R(F) = 0,3 \times 0,35 = 0,105$
4. D'après la formule des probabilités totales :  
 $p(F) = p(R \cap F) + p(\bar{R} \cap F)$  donc :  $p(F \cap \bar{R}) = p(F) - p(R \cap F)$   
38,5 % des chansons sont interprétées en français donc  $p(F) = 0,385$ .  
 $p(F \cap \bar{R}) = 0,385 - 0,105 = 0,28$
5.  $p_{\bar{R}}(F) = \frac{p(F \cap \bar{R})}{p(\bar{R})} = \frac{0,28}{1 - 0,3} = 0,4$   
40 % des chansons qui ne sont pas dans la catégorie rock sont interprétées en français.