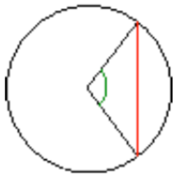
Trigonométrie

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.
Mais on attribue à *Hipparque de Nicée* (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.



Le grec *Claude Ptolémée* (90? ; 160?) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'*Hipparque* avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.

Plus tard, l'astronome et mathématicien *Regiomontanus (1436 ; 1476)*, de son vrai nom *Johann Müller* (ci-contre) développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques.
Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme *sinus*.

Au XVIe siècle, le français *François Viète* (1540 ; 1607), conseiller d'*Henri IV*, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

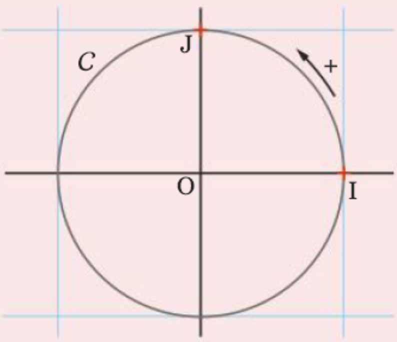
De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

1) Le radian

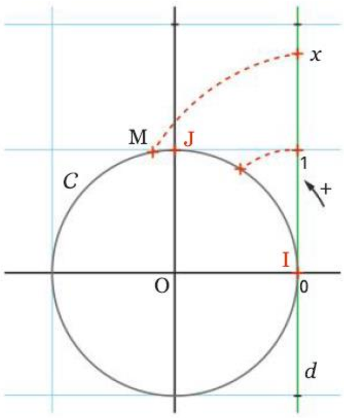
- Activité : Associer un angle et un arc de cercle page 182
- Le cercle trigonométrique

Définition

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$, **le cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé **sens direct** ou encore **sens trigonométrique**.



- Enroulement de la droite numérique



Définition

À chaque nombre réel x de la droite numérique, on associe un unique point M du cercle trigonométrique que l'on appelle **point image**.

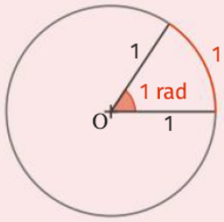
Propriété

Deux nombres réels x et x' de la droite numérique ont le même point image sur $\mathcal{C}$ si et seulement si $x = x' + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- Angle en radian

Définition

On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.
Le **radian** est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1.
Par conséquent $360° = 2\pi$ rad, $180° = \pi$ rad et 1 rad $\approx 57{,}3°$.



Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian						π		

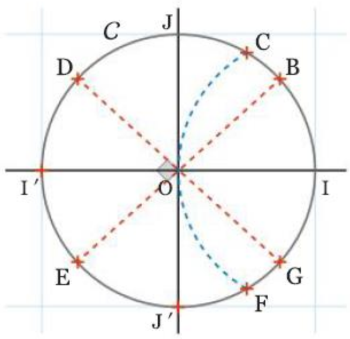
- Application directe

À l'aide du cercle trigonométrique ci-contre, répondre aux questions suivantes en sachant que les points F, O, C appartiennent au cercle de centre I et de rayon 1.

1. Quels sont les points images des réels $\frac{\pi}{3}$, -2π et $\frac{3\pi}{2}$?

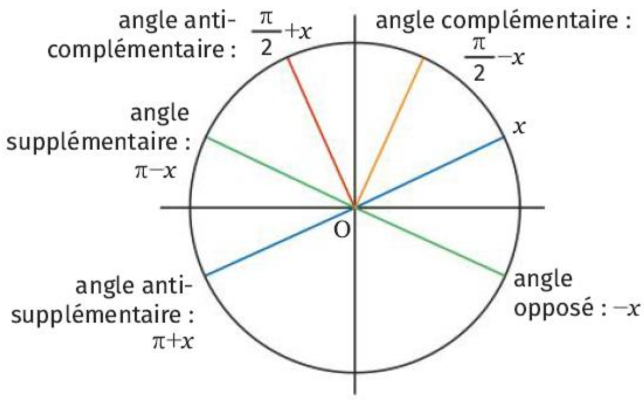
2. a. Que peut-on dire des points images des réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{4}$?

b. Donner deux autres nombres réels associés au même point image.

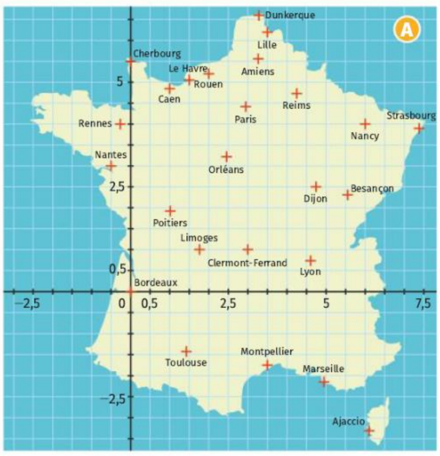


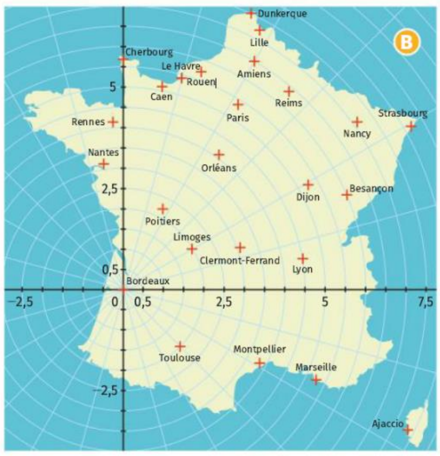
Exercices 41 – 42 – 43 – 44 – 46 47 – 48 p 194

- Angles associés



- Coordonnées cartésiennes et polaires





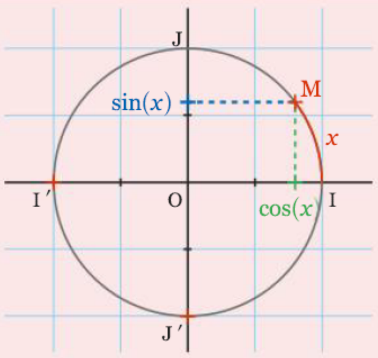
2) Cosinus et sinus d'un nombre réel

- Définition et propriétés

Définitions

On considère un réel x ayant pour point image le point M sur le cercle trigonométrique.

- L'abscisse du point M est appelée **cosinus** de x. On la note $\cos(x)$.
- L'ordonnée du point M est appelée **sinus** de x. On la note $\sin(x)$.



Propriétés

Pour tout nombre réel x, on a :

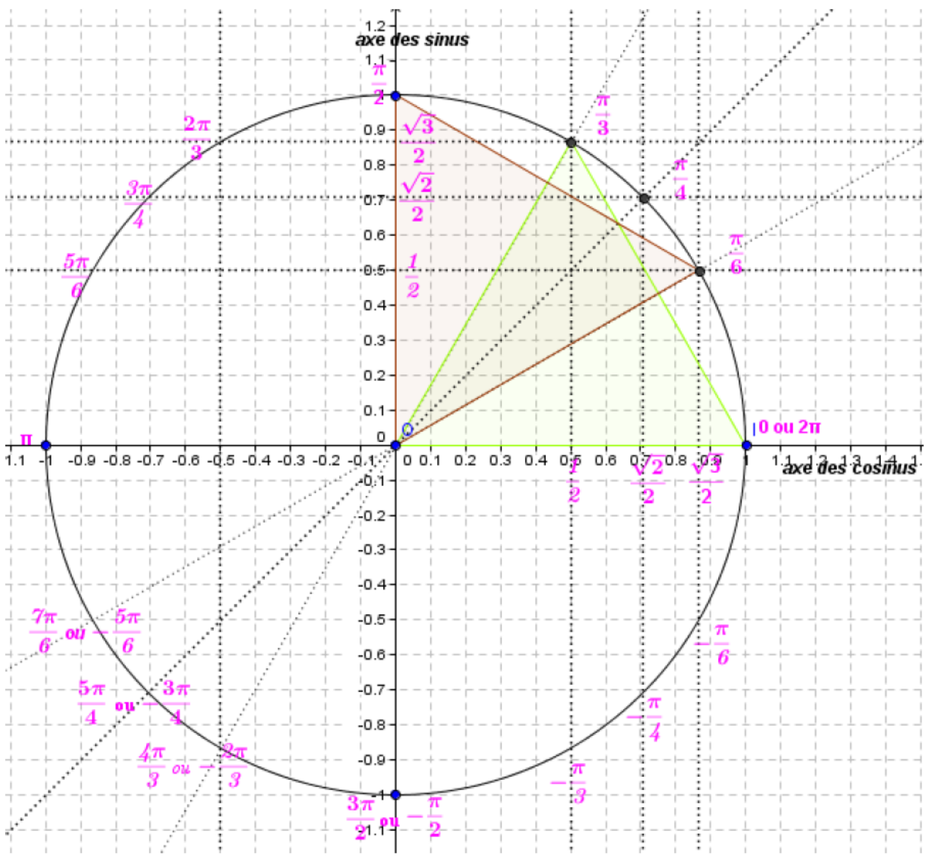
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Application directe :

Sachant que $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ et que $\sin(x) = 0{,}4$, donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $\cos(x)$.

- Valeurs remarquables

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



- Cosinus et sinus des angles associés

Pour tout réel x :

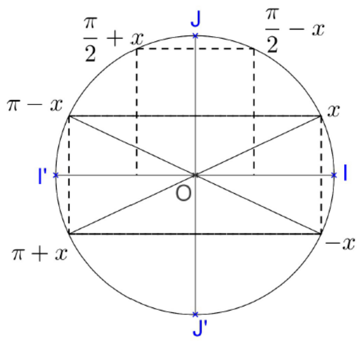
$\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(\pi+x)=-\cos x$ $\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\sin(\pi-x)=\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$



- Equations trigonométriques

$\cos x=\cos y$

$\Leftrightarrow\begin{cases} y=x[2\pi] \\ y=-x[2\pi]\end{cases}$

$\sin x=\sin y$

$\Leftrightarrow\begin{cases} y=x[2\pi] \\ y=\pi-x[2\pi]\end{cases}$

Exemple

Résoudre $\cos x=\frac{1}{2}$ et $\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$, mais $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

donc $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ x=-\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

$\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, mais $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\begin{cases} y=\frac{\pi}{4}[2\pi] \\ y=\pi-\frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ y=\frac{3\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$