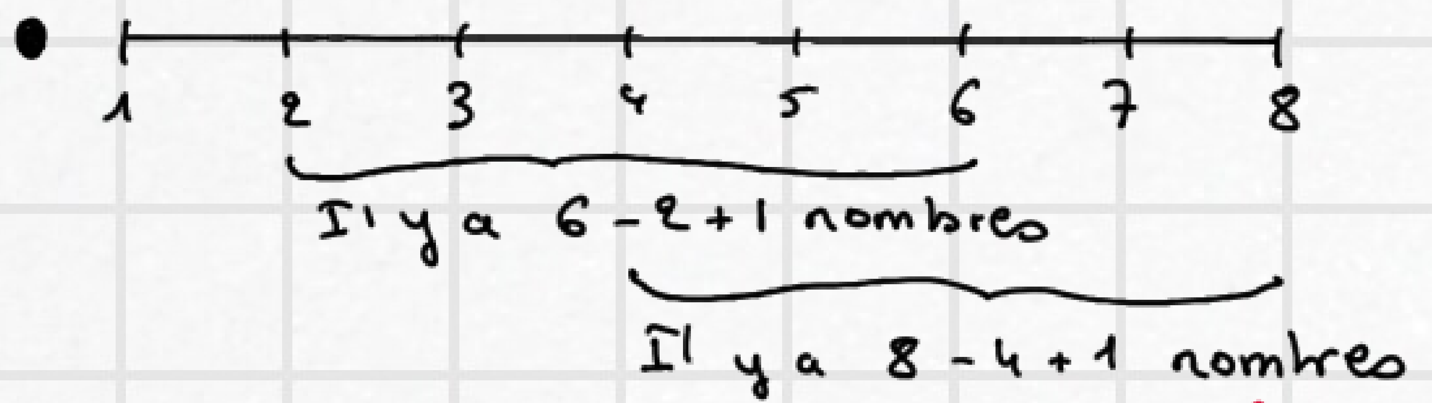
Sommes de termes d'une suite

Nombre de termes d'une somme

1) On considère l'intervalle $I = [15 ; 1307]$. Combien I contient-il de nombres entiers et de nombres pairs, de multiples de 7 ?



Si n et p sont des entiers naturels avec $p \leq n$, l'intervalle $[p ; n]$ contient $n-p+1$ nombres.

Donc l'intervalle $[15 ; 1307]$ contient

$1307 - 15 + 1 = \underline{1293 \text{ nombres entiers}}$

- Les nombres pairs forment une suite (u_n) arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 0$. Cette suite s'écrit $u_n = u_0 + n2$ et donc $u_n = 2n$.
Dans l'intervalle $[15 ; 1307]$, $u_8 = 16$ est le premier nombre pair et $u_{653} = 1306$ le dernier.

  Il y a donc $653 - 16 + 1 = \underline{638 \text{ nombres}}$ pairs dans l'intervalle I.

- Les multiples de 7 forment une suite arithmétique u de raison 7 et de premier terme 0. Ils s'écrivent $u_n = 7n$. Le premier de l'intervalle I est $u_3 = 7 \times 3 = 21$ et le dernier est u_n tel que $u_n \leq 1307$ donc $7n \leq 1307$ soit $n \leq \frac{1307}{7} \simeq 186,7$. Ainsi $u_{186} = 7 \times 186 = 1302$ est le plus grand multiple de 7 de l'intervalle.
Il y a donc $186 - 3 + 1 = \underline{184 \text{ multiples de } 7}$ dans cet intervalle.

2) Déterminer le nombre de termes des sommes suivantes :

$S_1 = 9 + 12 + 15 + \dots 123 + 126$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$S_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{6561}$

- S_1 est la somme des termes d'une suite arithmétique u de raison 3 et de premier terme $u_0 = 3$. Nous avons donc $u_n = 3 + 3n$.
Déterminons l'indice du dernier terme de la somme
$u_n = 126 \Leftrightarrow 3 + 3n = 126 \Leftrightarrow n = \frac{126-3}{3} = 4$.
De u_0 à u_{46}, il y a $46 - 0 + 1 = \underline{47 \text{ termes}}$

- $S_2 = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Si l'on utilise les puissances de 2 comme compteur, nous pouvons en déduire que S_2 contient $\underline{n+1 \text{ termes}}$.

- S_3 est la somme des termes d'une suite géométrique u de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $-\frac{1}{3}$. Ainsi $u_n = u_0 \times q^n$ et donc $u_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
Déterminons le dernier indice de la somme.
$u_n = -\frac{1}{6561} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{6561} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{2187}$
Soit $n = 7$.
De u_0 à u_7, il y a $\underline{8 \text{ termes}}$.

Somme de termes

3) La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0. On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

a) $u_{17} = 105$ et $r = -2$. Calculer u_0 et S_{17}.

b) $r = -7$ et $S_{32} = 0$ calculer u_0 et u_{32}.

a) $u_0 = u_{17} - 17r = 105 - 17 \times (-2) = \underline{139}$

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par : $(\text{nombre de termes}) \times \frac{\left(\text{1er terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme}\right)}{2}$

$S_{17} = \frac{18 \times (139 + 105)}{2} = \underline{2196}$.

b) $S_{32} = 0$ donc $33 \times \left(\frac{u_0 + u_0 + 32r}{2}\right) = 0$

ainsi $2u_0 + 32r = 0$ soit $u_0 + 16r = 0$

et puisque $r = -7$ $u_0 = -16(-7) = \underline{112}$

et donc $u_{32} = u_0 + 32 \times r = 112 + 32(-7) = \underline{-112}$

(Ce qui est logique puisque $S_{32} = 0$!!!!)

4) Calculer S_2 et S_3 de l'exercice 2.

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique s'obtient par la formule :

$\text{1er terme de la somme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes de la somme}}}{1 - \text{raison}}$

- $S_2 = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est la somme des termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$. Donc $S_n = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{=1/2}}$

$$S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

- $S_3 = \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{6561}$ est la somme des 8 premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{3}$ donc,

$$S_3 = \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^8}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^8}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right)$$

$$S_3 = \frac{3281}{13\,122}$$

5) a) Quelle est la nature de la suite utilisée dans cet algorithme ?

b) Préciser l'objectif de cet algorithme.

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  u PREND_LA_VALEUR 1
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u+3
    S PREND_LA_VALEUR S+u
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

a) Initialisation : $u \leftarrow 1$
Traitement : $u \leftarrow u + 3$

La suite utilisée dans cet algorithme est la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 1.

b)

i	/	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
S	0	4	11	21	34	50	69	91	116	144	175

L'objectif de cet algorithme est de faire la somme des termes de la suite arithmétique définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ de u_1 à u_{10}.

Remarque : L'énoncé initialise S à 0, ce qui visiblement élimine $u_0 = 1$ de cette somme. Est-ce volontaire ou est-ce une erreur de l'énoncé de l'exercice ?

6) Écrire un algorithme permettant de calculer la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$ le nombre n étant choisi par l'utilisateur.

```
Lire n
S ← 0
Pour i allant de 0 à n-1
    U ← 2 + (1/2)×i
    S ← S + U
Fin Pour
```

La variable S contient la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2.

6) a) Vérifier que la suite (w_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $w_n = 2^n - 2n + 2$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

b) Écrire (w_n) comme la somme de 2 suites (u_n) et (v_n) respectivement arithmétique et géométrique que l'on déterminera.

c) Calculer la somme $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{19}$

a) $w_0 = 2^0 - 2\times0+2 = 1-0+2 = 3$
$w_1 = 2^1 - 2\times1+2 = 2-2+2 = 2$
$w_2 = 2^2 - 2\times2+2 = 2$

$w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$ donc (w_n) n'est pas arithmétique
$\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$ donc (w_n) n'est pas géométrique.

b) $\left.\begin{aligned} u_n &= -2n+2 \\ v_n &= 2^n \end{aligned}\right\} \quad w_n = u_n + v_n$

(u_n) est arithmétique de raison -2 et de premier terme 2 $(u_n = u_0 + nr)$
(v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme 1 $(v_n = v_0 \times q^n)$

c) $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{19}$
$= u_0+v_0 + u_1+v_1 + \dots + u_{19}+v_{19}$
$= \underbrace{(u_0+u_1+\dots+u_{19})} + (v_1+v_2+\dots+v_{19})$
$= \frac{20\times(2+(-36))}{2} + 1\times\frac{1-2^{20}}{1-2}$
$= -340 + 2^{20} - 1$
$= 2^{20} - 341$

7) Trouver cinq nombres a, b, c, d, e et f, termes consécutifs d'une suite arithmétique tels que :
$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f = 55 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 695 \end{cases}$$

Nommons r la raison de cette suite.

Pour des raisons de symétrie, il est intéressant d'exprimer les autres nombres en fonction de c. La première égalité donne :

$$\underbrace{c-2r}_{a} + \underbrace{c-r}_{b} + c + \underbrace{c+r}_{d} + \underbrace{c+2r}_{e} = 55$$

donc $5c = 55$ d'où $c = 11$

Remplaçons c par 11 dans la 2ème égalité :

$$(11-2r)^2 + (11-r)^2 + 11^2 + (11+r)^2 + (11+2r)^2 = 695$$

Développons :

$$5 \times 11^2 + 2 \times 11 (\underbrace{-2r-r+r+2r}_{0}) + 4r^2 + r^2 + r^2 + 4r^2 = 695$$

$$605 + 10r^2 = 695$$

$$10r^2 = 90$$

$$r^2 = 9 \iff r = 3 \text{ ou } r = -3.$$

Ces 2 raisons donnent la même suite de nombres : 5, 8, 11, 14 et 17.

7) Suites emmêlées

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et v_1, v_2.

2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que (d_n) est une suite géométrique.

b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

3. Soit $s_n = u_n + v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

a. Calculer s_0, s_1, s_2.

b. Montrer que $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?

4. En déduire u_n et v_n en fonction de n.

5. Déterminer en fonction de n

$U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

1) $u_1 = \dfrac{2u_0 + v_0}{3} = \dfrac{2 \times 0 + 2}{3} = \dfrac{2}{3}$

$v_1 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{0 + 2 \times 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

$u_2 = \dfrac{2u_1 + v_1}{3} = \dfrac{2 \times 2/3 + 4/3}{3} = \dfrac{8}{9}$

$v_2 = \dfrac{u_1 + 2v_1}{3} = \dfrac{2/3 + 2 \times 4/3}{3} = \dfrac{10}{9}$

$d_n = v_n - u_n$ donc $d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

2a) $d_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - u_n - 2v_n}{3}$

$= \dfrac{u_n - v_n}{3} = \dfrac{d_n}{3} = \dfrac{1}{3} d_n$

(d_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $d_0 = v_0 - u_0 = 2$

2b) $d_n = d_0 \times q^n$ donc $d_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) a) $s_0 = u_0 + v_0 = 2$

$s_1 = u_1 + v_1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$s_2 = u_2 + v_2 = \frac{8}{9} + \frac{10}{9} = \frac{18}{9} = 2$

b) $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} + \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{3u_n + 3v_n}{3}$

$= u_n + v_n = s_n$

Ainsi (s_n) est une suite constante qui est égale à l'un de ses termes donc $s_n = 2$

4) $d_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $u_n - v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$s_n = 2$ donc $u_n + v_n = 2$

on obtient donc le système suivant $\begin{cases} u_n - v_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ u_n + v_n = 2 \end{cases}$

En additionnant membre à membre ces 2 égalités, nous obtenons :

$2u_n = 2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \iff u_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

et $v_n = 2 - u_n = 2 - \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

5) $U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$= 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1\right) + \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \cdots + \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$U_n = (n+1) \times 1 + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

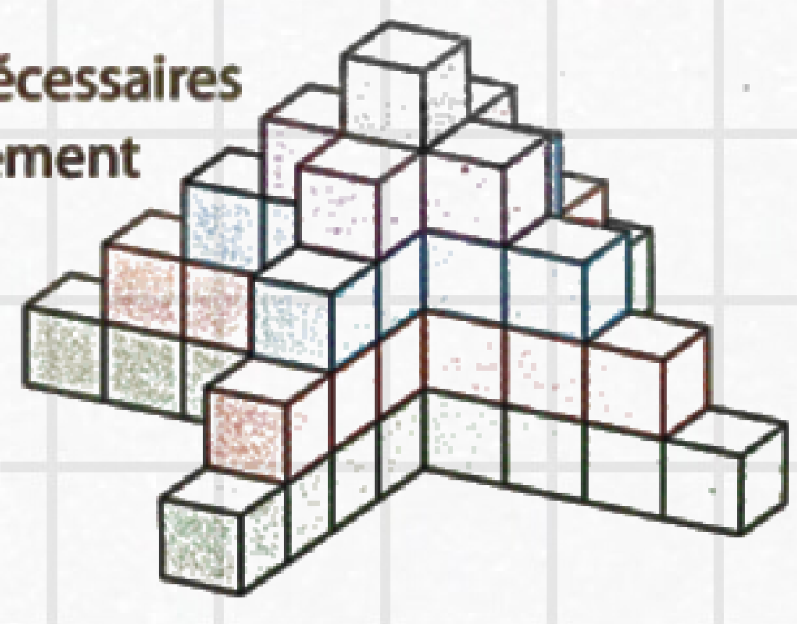
$U_n = (n+1) + 1 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\underbrace{1 - \frac{1}{3}}_{2/3}} = (n+1) + \frac{3}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

Le calcul de $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ est identique. Il suffit de remplacer "+" par "-" devant la somme des puissances de $\frac{1}{3}$.

$V_n = (n+1) - \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

8)

Combien de cubes sont nécessaires pour réaliser un tel empilement de cubes à 100 niveaux ?
Quel est le plus grand empilement de ce type que l'on peut réaliser si on dispose de 12 420 cubes ?



Cet empilement est constitué de la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme 1.

Si le premier terme est $u_1 = 1$ alors $u_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$

Pour 100 niveaux, il faut $100 \times \dfrac{(1 + 4 \times 100 - 3)}{2} = 19\,900$ cubes

Pour 12 420 cubes, résolvons $n\left(\dfrac{1 + 4n - 3}{2}\right) \leqslant 12\,420$ soit $n(4n-2) \leqslant 24\,840$, équation du second degré $4n^2 - 2n - 24840 \leqslant 0$

La racine positive est $\dfrac{1 + \sqrt{99361}}{4} \simeq 79{,}05$. L'empilement fera moins de 79 étages.