Suites. Suites arithmétiques et géométriques.

Définir une suite

1) Trouver la fonction f telle pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ et calculer u_0 à u_2 dans les 2 cas suivants.

a) $u_n = 2n+5$ donc $f(x) = 2x+5$. Pour calculer u_n, il suffit de remplacer n par sa valeur numérique.

$u_0 = 2\times 0+5 = 5$; $u_1 = 2\times 1+5 = 7$; $u_2 = 2\times 2+5 = 9$

b) $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$ donc $f(x) = x^2 - \sqrt{x} + 1$.

$u_0 = 0^2 + \sqrt{0} + 1 = 1$; $u_1 = 1^2 + \sqrt{1} + 1 = 3$; $u_2 = 4 + \sqrt{2} + 1 = 5 + \sqrt{2}$

2) Trouver la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer u_1 à u_3 avec :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1} \end{cases} \text{ donc } f(x) = \frac{2x}{x+1}.$$

Pour calculer les différentes valeurs u_n, il faut remplacer n par des valeurs numériques, mais attention, en remplaçant par exemple n par 0 dans la relation de récurrence, on obtient le terme suivant, c'est à dire u_1 :

- $n=0$: $u_{0+1} = \dfrac{2u_0}{u_0+1}$ donc $u_1 = \dfrac{2u_0}{u_0+1} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$
- $n=1$: $u_{1+1} = \dfrac{2u_1}{u_1+1}$ donc $u_2 = \dfrac{2u_1}{u_1+1} = \dfrac{5/3}{5/3+1} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{8}{3}} = \dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$
- $n=2$: $u_3 = \dfrac{2u_2}{u_2+1} = \dfrac{10/8}{\frac{5}{8}+1} = \dfrac{10}{8}\times\dfrac{8}{13} = \dfrac{10}{13}$

3) La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$. Exprimer en fonction de n les termes u_{n-1}, u_{n+1}, u_{2n}, u_{2n+1} de la suite (u_n).

Il suffit pour cela remplacer n par $n-1$, puis $n+1$, $2n$ et $2n+1$.

$$u_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1+1}}{2(n-1)} = \frac{(-1)^n}{2(n-1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1+1}}{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+2}}{2(n+1)} = \frac{(-1)^n\times(-1)^2}{2(n+1)} = \frac{(-1)^n}{2(n+1)}$$

$$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n)} = \frac{(-1)^{2n}\times(-1)}{4n} = \frac{((-1)^2)^n\times(-1)}{4n} = \frac{1^n(-1)}{4n} = \frac{-1}{4n}$$

$$u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+1)} = \frac{[(-1)^2]^{n+1}}{2(2n+1)} = \frac{1^{n+1}}{2(2n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)}$$

3 bis) Même énoncé que 3) avec $u_n = 3n^2 - 1$

Exemple plus simple que 3.

$u_{n-1} = 3(n-1)^2 - 1 = 3(n^2-2n+1) - 1 = 3n^2 - 6n + 2$

$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 1 = 3(n^2+2n+1) - 1 = 3n^2 + 6n + 2$

$u_{2n} = 3(2n)^2 - 1 = 3\times 4n^2 - 1 = 12n^2 - 1$

$u_{2n+1} = 3(2n+1)^2 - 1 = 3(4n^2+4n+1) - 1 = 12n^2 + 12n + 2$

4) Calculer les premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$

a) $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2}\times u_0 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$; $u_4 = \frac{1}{2}u_3 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

Nous constatons que $u_0 = \frac{1}{2^0}$; $u_1 = \frac{1}{2^1}$; $u_2 = \frac{1}{2^2}$; $u_3 = \frac{1}{2^3}$

Nous pouvons conjecturer que $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

b) $u_1 = u_0 + 5 = 6$; $u_2 = u_1 + 5 = 11$; $u_3 = 16$

Nous pouvons conjecturer que $u_n = 1 + 5n$

c) $u_0 = 1$; $u_1 = 1 - \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$;

$$u_2 = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$u_3 = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Nous pouvons conjecturer que $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Nous pouvons vérifier que ces expressions en fonction de n satisfont la relation de récurrence

a) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

$$\left.\begin{aligned} &u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}\right\} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$$

b) $u_n = 1 + 5n$

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= 1+5(n+1) = 1+5n+5 = 5n+6 \\ u_n + 5 &= 1+5n+5 = 5n+6 \end{aligned}\right\} u_{n+1} = u_n + 5$$

c) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2} \\ 1 - \frac{1}{u_n+1} &= 1 - \frac{1}{\frac{1}{n+1}+1} = 1 - \frac{1}{\frac{1+n+1}{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-(n+1)}{n+2} \\ &= \frac{n+2-n-1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}\right\} u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n+1}$$

5) On donne $u_0 = 2$; $u_1 = 1 + \dfrac{1}{2}$

$$u_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \; ; \; u_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

a) Calculer u_1, u_2, u_3.

b) Conjecturer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

$u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$u_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$

$u_3 = 1 + \frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}_{\frac{5}{3}}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}$

b) $u_1 = 1 + \frac{1}{u_0}$; $u_2 = 1 + \frac{1}{u_1}$; $u_3 = 1 + \frac{1}{u_2}$

Nous pouvons donc conjecturer que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

6) a) qu'obtient-on pour $n = 7$ et $p = 15$ avec l'algorithme suivant ?

```
Variables
i, u, n, p
entrées
n, p
Traitement
Pour i de n jusque p faire
u reçoit 3×i − 2
Afficher « u » i « = » u
FinPour
```

b) (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$u_n = \frac{3}{2}n + 4$.

En s'inspirant de l'algorithme ci-contre, écrire un algorithme permettant d'obtenir les dix termes qui suivent le terme d'indice n (n n'étant pas fixé).

a)

i	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u	19	22	25	28	31	34	37	40	43

L'algorithme affiche le tableau de valeurs des termes u_7 à u_{15} de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$. L'affichage est

$u_7 = 19$ ..... $u_{14} = 40$

$u_8 = 22$ $\quad$ $u_{15} = 43$

b)

```
Variables
i, u, n
entrée
n
Traitement
Pour i de n jusque 10 faire
u reçoit (3/2)×i + 4
Afficher « u » i « = » u
FinPour
```

Suites arithmétiques

7) Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

• $u_n = \frac{5}{3}n - 1$.

$u_{n+1} = \frac{5}{3}(n+1) - 1 = \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} - 1$

$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} - 1 - (\frac{5}{3}n - 1) = \frac{5}{3}n + \frac{5}{3} - 1 - \frac{5}{3}n + 1$

$= \frac{5}{3}$

La suite (u_n) est arithmétique de raison $\frac{5}{3}$.

D'une façon générale, les suites (u_n) définies par $u_n = an + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ sont arithmétiques de raison "a" et de premier terme $u_0 = b$.

$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b)$

$= an + a + b - an - b$

$= a$.

• $u_n = \sqrt{n+1}$

$u_0 = 1$; $u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = \sqrt{3}$

$u_1 - u_0 = \sqrt{2} - 1$

$u_2 - u_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 1 \neq 0$

ainsi $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Pour démontrer qu'une propriété n'est pas vraie, il suffit de trouver un contre-exemple.

• $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

$u_0 = -1$; $u_1 = -3$; $u_2 = -7$

$u_1 - u_0 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$u_2 - u_1 = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

• $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 3 \end{cases}$

C'est la définition d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$ ($u_{n+1} = u_n + 3$)

8) (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Exprimer u_n en fonction de n.

• $u_0 = -3$ et $r = \frac{1}{2}$

$u_n = u_0 + nr$ d'où $u_n = -3 + \frac{1}{2}n$

• $u_1 = 5$ et $r = \frac{1}{10}$

$u_n = u_p + (n-p)r$ ici $p = 1$

$u_n = u_1 + (n-1)r$ d'où.

$u_n = 5 + (n-1)\frac{1}{10} = 5 + \frac{n}{10} - \frac{1}{10}$

$u_n = \frac{n}{10} + \frac{49}{10}$

• $u_5 = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{2}$

$u_n = u_5 + (n-5)r = \frac{1}{3} + (n-5)\frac{1}{2}$

$u_n = \frac{n}{2} - \frac{13}{6}$

9) (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Calculer u_{20}.

- $u_5 = 27$ et $u_{10} = 33$

Calculons r :

$u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n = 10$ et $p = 5$

$u_{10} = u_5 + (10-5)r$ donc $33 = 27 + 5r$

ainsi $r = \frac{33-27}{5} = \frac{6}{5}$

or $u_{20} = u_{10} + (20-10) \times r$ avec $r = \frac{6}{5}$

donc $u_{20} = 33 + 10 \times \frac{6}{5} = 33 + 12 = \underline{55}$

- $u_3 = \sqrt{2}$ et $u_5 = \sqrt{8}$

$u_5 = \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

Calculons r : $u_5 = u_3 + 2r$

$2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2r$ soit $r = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

or $u_{20} = u_5 + 15 \times r$

donc $u_{20} = 2\sqrt{2} + \frac{15 \times \sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{19\sqrt{2}}{2}}$

10) (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_8 = 176$ et $u_3 = 3$

Calculer u_0 et la raison r.

Nous savons que $u_3 = 3$ donc :

$u_2 = 3 - r$, $u_1 = 3 - 2r$, $u_4 = 3 + r$ ......

on peut écrire :

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 =$

$(3-2r) + (3-r) + (3) + (3+r) + (3+2r) + (3+3r) + (3+4r)$

$+ (3+5r) =$

$8 \times 3 + 3r + 4r + 5r = 24 + 12r$

or nous savons que $u_1 + u_2 + \dots + u_8 = 176$

donc $24 + 12r = 176$ et ainsi $r = \frac{176-24}{12}$

$\underline{r = \frac{38}{3}}$

$u_0 = u_3 - 3r = 3 - 3 \times \frac{38}{3} = \underline{-35}$

11) La suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$.

a) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

Prouvez que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$w_n = 2u_n + 3v_n.$$

Prouvez que la suite (w_n) est arithmétique.

a) (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$ donc

$u_n = 1 + 3n$

or $v_n = \frac{1}{2}u_n + 2$ donc

$v_n = \frac{1}{2}(1+3n) + 2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}n + 2$

$v_n = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}$.

Ainsi (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3}{2}$.

b) $w_n = 2u_n + 3v_n$

$= 2(1+3n) + 3\left(\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}\right)$

$= 2 + 6n + \frac{9}{2}n + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}n + \frac{13}{2}$

Ainsi (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{21}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{13}{2}$.

12) (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Prouvez que les suites (v_n) et (w_n) définies, pour tout entier naturel n, respectivement par $v_n = 2u_n + 5$ et $w_n = u_{3n} - 1$ sont arithmétiques et donnez leur raison.

(u_n) est une suite arithmétique de raison r donc $u_n = u_0 + nr$

$v_n = 2u_n + 5 = 2(u_0 + nr) + 5$

$v_n = 2u_0 + 2nr + 5$

$v_n = (2u_0 + 5) + (2r) \times n$

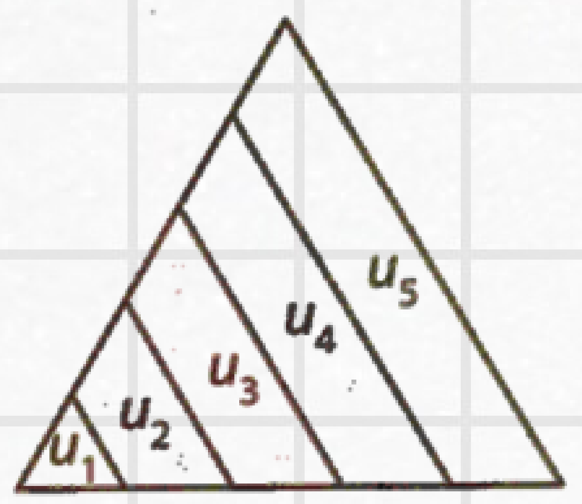
Ainsi (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2u_0 + 5$ et de raison $2r$.

$w_n = u_{3n} - 1 = u_0 + (3n)r - 1$

$w_n = (u_0 - 1) + (3r) \times n$

Ainsi (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = u_0 - 1$ et de raison $3r$.

13) La figure ci-contre indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment.
Tous les triangles de la figure sont équilatéraux.

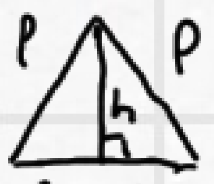


a) Prouvez que la suite (u_n) des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?

b) La suite (v_n) des périmètres est-elle arithmétique ?

---

a) Rappel de l'aire d'un triangle équilatéral de coté de longueur ℓ.



Le théorème de Pythagore appliqué dans l'un des 2 triangle rectangles donne :

$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \iff h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$

et donc $h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\sqrt{3\ell^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}\,\ell}{2}$

L'aire de ce triangle est égale à :

$\frac{h \times \ell}{2} = \frac{\sqrt{3}\,\ell^2}{4}$

Notons (S_n) la suite des aires des triangles équilatéraux de la figure donc un des sommets de la base horizontale est fixe (0) et l'autre mobile (n)

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$

$\vdots$

$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times n^2$

Construisons la suite (u_n) à partir de la suite (S_n)

$u_1 = S_1$

$u_2 = S_2 - S_1$ et donc $\underline{u_n = S_n - S_{n-1}}$

$u_3 = S_3 - S_2$

$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(n-1)^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(n^2 - (n-1)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(n^2 - (n^2 - 2n + 1))$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(n^2 - n^2 + 2n - 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2n-1)$

donc $u_n = \sqrt{3}\,n - \frac{\sqrt{3}}{2}$. (u_n) est une suite arithmétique de raison $\sqrt{3}$.

b) Les triangles associés à la suite (S_n) sont équilatéraux. Soit (v_n) la suite des périmètres

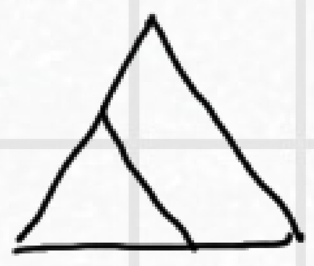
$v_1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$v_2 = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$

$v_3 = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$

$v_4 = 1 + 3 + 4 + 1 = 9$

Il semble que la suite (v_n) soit arithmétique de raison 2.



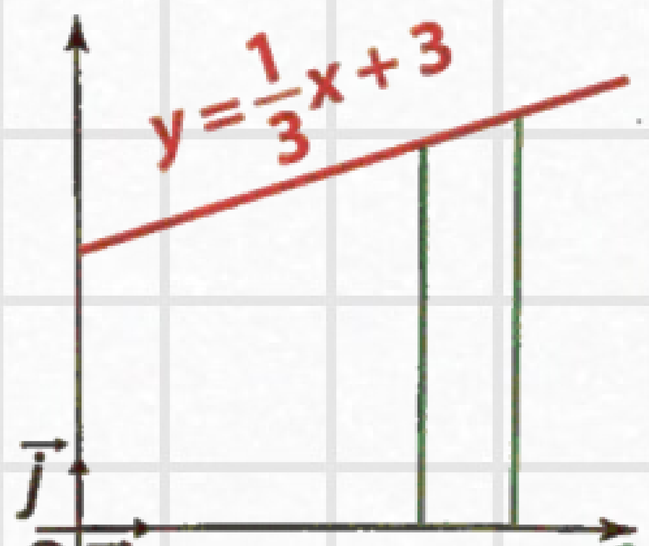
$v_n = n + 1 + (n-1) + 1$

$v_n = 2n + 1$

(v_n) est bien arithmétique de raison 2.

---

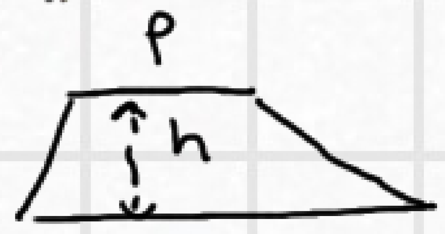
14) a_n et p_n sont respectivement l'aire et le périmètre du domaine en vert sur la figure ci-contre dans un repère orthonormé.



a) Calculez a_n et p_n en fonction de n.

b) Vérifiez que les suites (a_n) et (p_n) sont arithmétiques.

a) Aire d'un trapèze



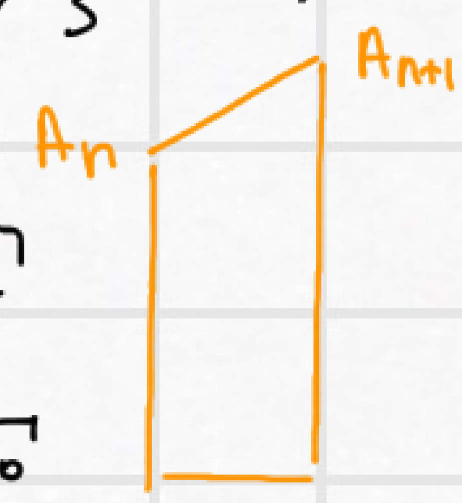
$\frac{h(\ell + L)}{2}$

Dans le cas présent les trapèzes sont sont rectangles : $\begin{cases} h = 1 \\ \ell = \frac{1}{3}n + 1 \\ L = \frac{1}{3}(n+1) + 1 \end{cases}$

donc $a_n = \frac{1 \times (\frac{1}{3}n + 1 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 1)}{2} = \frac{\frac{2}{3}n + \frac{5}{3}}{2}$

$\underline{a_n = \frac{1}{3}n + \frac{5}{6}}$

Pour déterminer p_n, il faut calculer la longueur A_nA_{n+1} où $A_n\left(n ; \frac{1}{3}n + 1\right)$ et $A_{n+1}\left(n+1 ; \frac{1}{3}(n+1) + 1\right)$.



$A_nA_{n+1} = \sqrt{(n+1-n)^2 + \left(\frac{1}{3}(n+1) + 1 - \left(\frac{1}{3}n + 1\right)\right)^2}$

$A_nA_{n+1} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}}$

$= \frac{\sqrt{10}}{3}$

donc $p_n = 1 + \frac{1}{3}n + 1 + \frac{1}{3}(n+1) + 1 + \frac{\sqrt{10}}{3}$

$p_n = \frac{2}{3}n + 3 + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{10+\sqrt{10}}{3}$

$p_n = \frac{2}{3}n + \frac{10+\sqrt{10}}{3}$ est le terme général d'une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

b) Nous avons déjà répondu à la question. Les suites définies par $u_n = an+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ sont arithmétiques de raison "a". Si l'on veut faire la démonstration, il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ et de montrer que cette différence est constante (indépendante de n).

Suites géométriques

15) Préciser si la suite est géométrique, et si oui, donner sa raison.

- $u_n = \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}}$ donc $u_{n+1} = \frac{2^{n+4}}{3^{n+3}}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+4}}{3^{n+3}}}{\frac{2^{n+3}}{3^{n+2}}} = \frac{2^{n+4}}{3^{n+3}} \times \frac{3^{n+2}}{2^{n+3}}$

$= 2^{n+4-n-3} \times 3^{n+2-n-3} = 2^1 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}$

ainsi (u_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$

- $u_n = 5^n - n$ donc $\begin{cases} u_0 = 5^0 - 0 = 1 \\ u_1 = 5 - 1 = 4 \\ u_2 = 25 - 2 = 23 \end{cases}$

$\frac{u_1}{u_0} = 4 \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{23}{4}$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

La suite (u_n) n'est pas géométrique.

- $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} \end{cases}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2}$ donc $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n}{2} = \frac{3}{2}u_n$.

$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n$ est la définition d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

- $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} \end{cases}$ donc $u_1 = \frac{u_0}{1} = -2$

$u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$\frac{u_1}{u_0} = 1$ et $\frac{u_2}{u_1} \neq 1$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

16) (u_n) est une suite géométrique de raison q. Calculer u_{10}.

- $u_0 = 3$ et $q = 4$

$u_n = u_0 \times q^n$ avec $n = 10$ donc

$u_{10} = 3 \times 4^{10} = 3\,145\,728$

- $u_5 = 486$, $u_7 = 4374$ et $q > 0$

$u_n = u_p \times q^{n-p}$ avec $n = 7$, $p = 5$

$u_7 = u_5 \times q^2$ donc $4374 = 486q^2$

d'où $q^2 = \frac{4374}{486}$ et puisque $q > 0$,

$q = \sqrt{\frac{4374}{486}} = 3$

ainsi $u_{10} = u_5 \times q^5$ donc $u_{10} = 486 \times 3^5$

$u_{10} = 118\,098$

16) (u_n) est une suite géométrique non nulle de raison $q > 0$ telle que :

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer q.

(u_n) est géométrique de raison q donc

$u_{n+1} = q u_n$ et $u_{n+2} = q^2 u_n$

donc $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \Rightarrow q^2 u_n = q u_n + u_n$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \neq 0$, on peut donc diviser par n : $q^2 = q + 1$ soit

$q^2 - q - 1 = 0$ ayant 2 solutions dont une seule est positive.

On a donc $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

17) (u_n) est une suite géométrique qui n'est pas constante. $u_0 = 5$ et $2u_2 = 3u_1 - u_0$. Trouver q.

(u_n) est géométrique donc $u_1 = q u_0$, $u_2 = q^2 u_0$.

En remplaçant dans $2u_2 = 3u_1 - u_0$ on a avec $u_0 = 5$

$5q^2 = 15q - 5$ soit en simplifiant par 5 : $q^2 - 3q + 1 = 0$.

Cette équation admet 2 solutions, correspondant à 2 suites géométriques solution de raisons $q_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

---

18 Le prix d'un article augmente tous les ans de 3 %. On note p_0 son prix initial, p_1 son prix un an après, p_n son prix au bout de n années (n est un entier naturel).

a) Exprimez en fonction de son prix initial, son prix au bout de cinq ans.

b) Exprimez en pourcentage l'augmentation de p_0 à p_5.

---

a) Augmenter de t% une quantité revient à multiplier cette quantité par $1 + \frac{t}{100}$.
Ainsi augmenter le prix d'un article chaque année de 3% revient à le multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$.

Ainsi $p_1 = 1{,}03\, p_0$, $p_2 = 1{,}03\, p_1$, ...
et $p_{n+1} = 1{,}03\, p_n$ pour tout entier n.
La suite (p_n) est donc géométrique de raison 1,03 et de premier terme p_0
ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = p_0 \times 1{,}03^n$

donc $\underline{p_5 = p_0 \times 1{,}03^5}$

b) $1{,}03^5 \simeq 1{,}159$ ce qui correspond à une augmentation de 15,9% de p_0 à p_5.

---

19 Dire que des intérêts sont capitalisés signifie que chaque année, ils sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts.

Quelle somme doit-on placer avec un taux d'intérêt de 5 % l'an afin de détenir une somme de 10 000 € au bout de dix ans :

a) lorsque les intérêts sont capitalisés ;

b) lorsque les intérêts ne sont pas capitalisés.

---

a) Nommons s_0 la somme que l'on doit placer.
Lorsque les intérêts sont capitalisés, s_0 augmente chaque année de 5% donc $s_1 = s_0 \times 1{,}05$, $s_2 = s_1 \times 1{,}05$.
La suite (s_n) est donc géométrique de raison 1,05 et de premier terme s_0. A l'issue de l'année n, la somme est donc $s_n = s_0 \times 1{,}05^n$. Au bout de 10 ans, $s_{10} = s_0 \times 1{,}05^{10}$. Si $s_{10} = 10000$ alors $10000 = s_0 \times 1{,}05^{10}$ et donc

$$s_0 = \frac{10000}{1{,}05^{10}} \simeq \underline{6139{,}14\ €}$$

b) Lorsque les intérêts ne sont pas capitalisés, seul le capital initial produit des intérêts. Ils sont donc constants et égaux à 5% de s_0 soit $\frac{5}{100} s_0$. Dans ce cas :

$s_1 = s_0 + \frac{5}{100} s_0$ et $s_2 = s_1 + \frac{5}{100} s_0$
$= s_0 + 2 \times \frac{5}{100} s_0$. On a donc à l'issue de l'année n : $s_n = s_0 + n \times \frac{5}{100} s_0$. (s_n) est donc dans ce cas une suite arithmétique de raison $\frac{5}{100} s_0$ et de premier terme s_0.

On a donc $s_n = s_0 + \frac{5}{100} s_0 \times n$

$$s_n = s_0 \left(1 + \frac{5}{100} n\right)$$

Si $s_{10} = 10000$ alors $10000 = s_0 \left(1 + \frac{5 \times 10}{100}\right)$

et donc $s_0 = \frac{10\,000}{1{,}5} \simeq \underline{6666{,}7\ €}$

<u>Remarque</u> : Les intérêts composés sont plus intéressants que les intérêts qui ne le sont pas.