Probabilités conditionnelles et suites

① **Une suite de parties**

Max joue n parties successives sur sa console de jeu. On admet que la probabilité qu'il gagne la première partie est 0,1, et que :

– s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,8 ;

– s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,6.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note G_n l'événement « Max gagne la n-ième partie ». On pose $p_n = P(G_n)$.

Objectif Max peut-il espérer, en jouant suffisamment longtemps, avoir trois chances sur quatre de gagner une partie ?

1. On examine le processus sur les deux premières parties. La probabilité que Max gagne la première partie est 0,1, donc la probabilité qu'il la perde est 0,9. L'énoncé incite à utiliser un arbre pondéré pour représenter les deux premières parties.

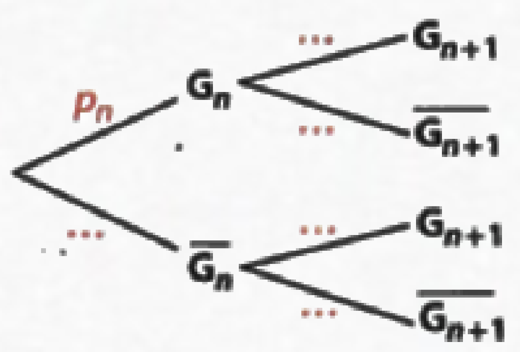
a) Construisez cet arbre pondéré.

b) Vérifiez que $p_2 = 0{,}62$.

2. Lors de l'enchaînement des différentes parties, la réalisation d'un arbre devient vite fastidieuse.

Une idée est de chercher une relation de récurrence entre la probabilité de gagner la partie $n+1$ et celle de gagner la partie n.

a) Reproduisez puis complétez l'arbre ci-dessous.



b) Déduisez-en que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6.$$

3. Ainsi, (p_n) est une suite récurrente du type $p_{n+1} = ap_n + b$ (voir chapitre 1). Or, il s'agit de comparer, pour n suffisamment grand, p_n et 0,75. D'où l'idée d'introduire la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = p_n - 0{,}75$.

a) Démontrez que la suite (u_n) est géométrique. Précisez son premier terme et sa raison.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, déduisez-en le signe de u_n.

c) Concluez quant à la question posée.

② **La marche de l'empereur**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un sautoir pour plonger et d'un toboggan.

On a observé que si un manchot choisit :

– le sautoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 ;

– le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements :

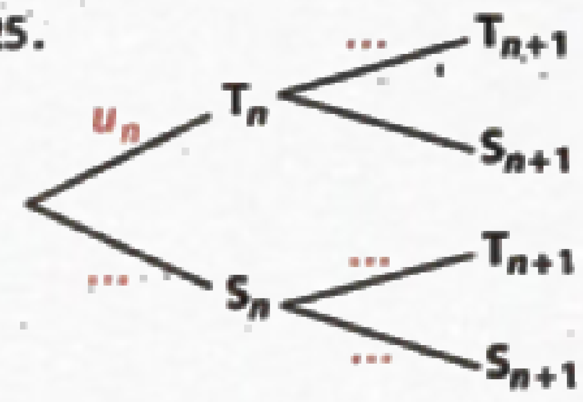
S_n : « Le manchot utilise le sautoir lors de son n-ième passage » ;

T_n : « Le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage ».

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = P(T_n)$.

1. a) Vérifiez que $P(T_2) = 0{,}25$.

b) Recopiez puis complétez l'arbre ci-contre.



c) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2.$$

d) À l'aide d'une calculatrice, indiquez une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

a) Prouvez que la suite (v_n) est géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.

b) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculez la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture du **1. d)** ?

Corrigés :

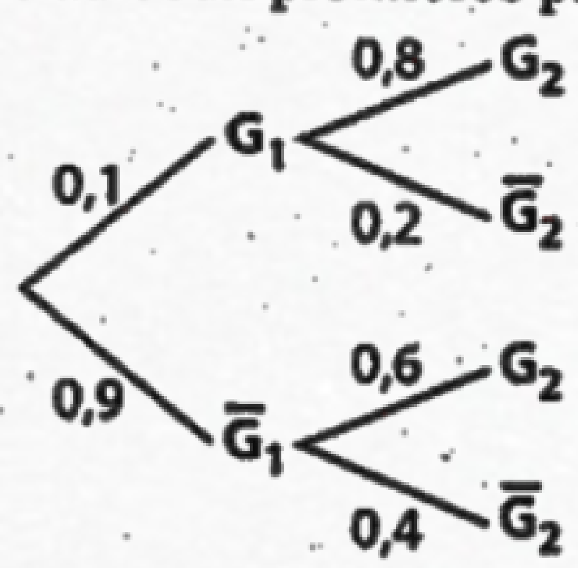
①

• ***Les objectifs***

– Définir une suite récurrente de probabilités.

– Étudier puis interpréter le signe d'une suite auxiliaire.

1. a) Arbre associé au deux premières parties :

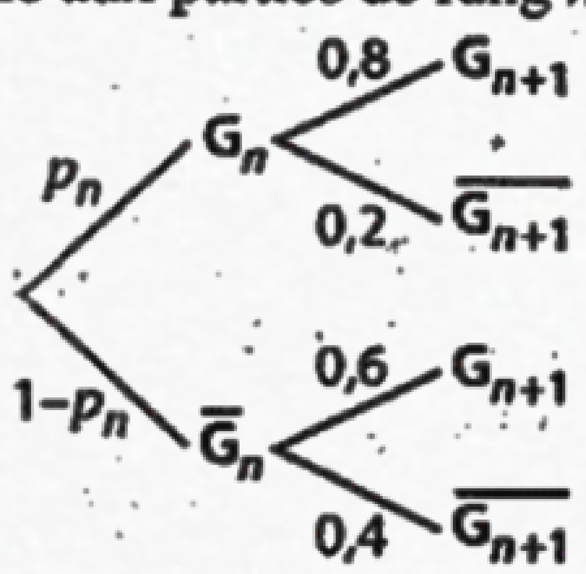


b) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)$$

d'où $p_2 = 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}62$.

2. a) Arbre associé aux parties de rang n et $n+1$:



b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right)$$

$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}6(1 - p_n)$

$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6.$

3. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75 = 0{,}2p_n + 0{,}6 - 0{,}75$

$u_{n+1} = 0{,}2p_n - 0{,}15.$

Or $p_n = u_n + 0{,}75$, donc :

$$u_{n+1} = 0{,}2(u_n + 0{,}75) - 0{,}15$$

soit $u_{n+1} = 0{,}2u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}75 = -0{,}65$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 q^{n-1}$, soit :

$$u_n = -0{,}65 \times 0{,}2^n \text{ donc } u_n < 0.$$

c) Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n < 0{,}75$.

Max ne peut pas espérer avoir 3 chances sur 4 de gagner une partie.

②

Bac S Nouvelle-Calédonie 2009