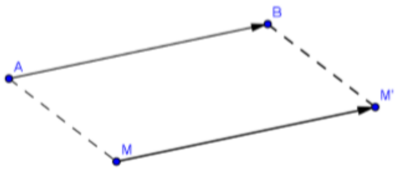
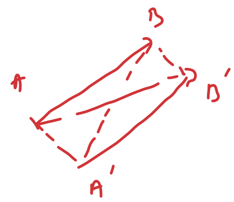
Notion de vecteurs

1. Translation et vecteurs

Propriété et définition :

Soit A et B deux points du plan. À tout point M du plan on associe le point M' tel $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). M' est *l'image* de M par la translation "amenant" A en B. On dit alors que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AB}$. On dit aussi que $\vec{MM'}$ et $\vec{AB}$ sont des vecteurs égaux et on note $\vec{AB} = \vec{MM'}$. On notera aussi $\vec{u}$ tout vecteur tel que $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{MM'}$.





Remarque :

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies :

- les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles : on dit qu'elles ont la même direction ;
- le sens de A vers B est le même que de A' vers B' ;
- les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même longueur : on dit qu'ils ont la même norme.

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{A'B'}\|$

Définition :

Soit A et B deux points du plan. On appelle :

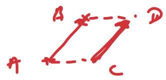
- *vecteur opposé* au vecteur $\vec{AB}$ le vecteur $\vec{BA}$. On note $-\vec{AB} = \vec{BA}$.
- vecteur nul le vecteur $\vec{AA}$ ou $\vec{BB}$. On note $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$.

Propriété :

Soit A, B et M trois points. M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\vec{AM} = \vec{MB}$.

Propriété (du parallélogramme)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si , $AB\boldsymbol{D}C$ est un parallélogramme (éventuellement aplati)



Synthèse :

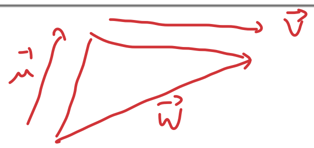
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa ...norme $\|\overrightarrow{AB}\|$...(la longueur de AB), sa ...direction... (inclinaison de la droite (AB)) et son ...sens... (de A vers B).
Il définit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transformant A en B.

Le point A est ...l'origine... du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B en est...l'extrémité.

2. Somme de deux vecteurs

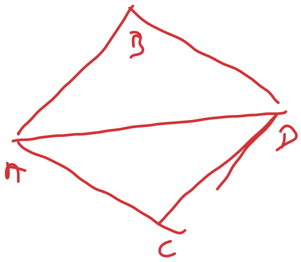
Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.
La *somme des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur .... résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Propriétés :

Pour tous points du plan A, B, C et D, on a :
1) La relation de Chasles $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$
2) La propriété du parallélogramme :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si, $ABDC$ est un ...parallélogramme...



Propriété

La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ définie par ...$\vec{u} + (-\vec{v})$...

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$,

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ 2) $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ 3) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} =$...$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$...

3. Produit d'un vecteur par un réel

Définition

$\vec{u}$ $2\vec{u}$ $\frac{1}{2}\vec{u}$ $-\vec{u}$ $-2\vec{u}$

Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan, alors le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur ayant :

même direction que $\vec{u}$.

même sens que $\vec{u}$ si $k>0$ et de sens contraire si $k<0$

$\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

Si $k = 0$, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan $0\vec{u} = \vec{0}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors pour tout réel $k\vec{0} = \vec{0}$

Exemples

$\vec{u}$, $2\vec{u}$ et $\frac{2}{3}\vec{u}$ ont même sens

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{-\frac{4}{3}u}$ ont des sens opposés

Propriétés :

1) $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ 2) $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ 3) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

Définition

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $\vec{u} \neq \vec{0}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \cdots k\vec{u}$.

2) Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Par conséquent, deux vecteurs non nuls colinéaires, on la même direction

Théorème

~~Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ....si et seulement si il existe un réel k tel que ....~~

Théorème (Alignement de points)

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires