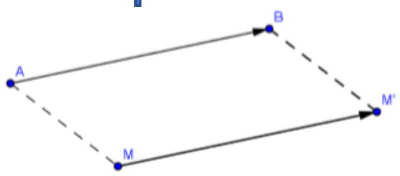
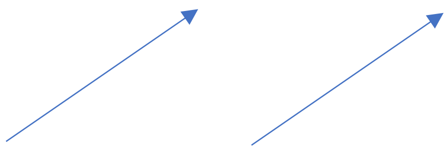
Notion de vecteurs

1. Translation et vecteurs

Propriété et définition :

Soit A et B deux points du plan. À tout point M du plan on associe le point M' tel $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). M' est *l'image* de M par .... On dit alors que M' est l'image de M par .... On dit aussi que $\vec{MM'}$ et $\vec{AB}$ sont .... et on note .... On notera aussi $\vec{u}$ tout vecteur tel que $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{MM'}$.





Remarque :

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies :

- les droites (AB) et $(A'B')$ sont .... : on dit qu'elles ont la même ....;
- le .... de A vers B est le même que de A' vers B' ;
- les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même .... : on dit qu'ils ont la même ....

Définition :

Soit A et B deux points du plan. On appelle :

- *vecteur opposé* au vecteur $\vec{AB}$ le vecteur .... On note ....
- .... le vecteur $\vec{AA}$ ou $\vec{BB}$. On note $\vec{AA} = \vec{BB} =$...... .

Propriété (du parallélogramme)

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si , $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati)

Synthèse :

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par **sa norme** $\|\overrightarrow{AB}\|$ (la longueur de AB), sa **direction..** (inclinaison de la droite (AB)) et son **sens** (de A vers B).
Il définit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transformant A en B.

Le point A est **l'origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B en est **l'extrémité.**

2. Somme de deux vecteurs

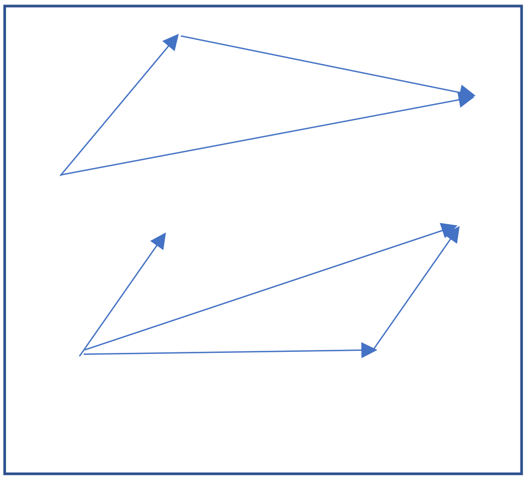
Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.
La *somme des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriétés :

Pour tous points du plan A, B, C et D, on a :

1) La relation de Chasles $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots D} = \overrightarrow{AD}$
2) La propriété du parallélogramme :
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si, $ABDC$ est un ………………………..



Propriété

La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ définie par ……………………………

Propriétés

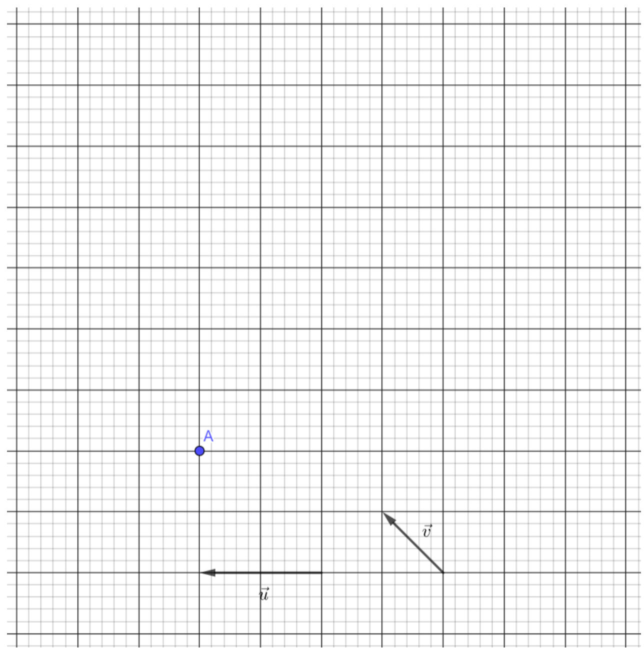
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ 2) $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ 3) $\vec{u}+\overrightarrow{(v+\vec{w})}=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

Représenter une somme et une différence de vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit A un point.
Représenter à partir du point A le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{w}$.

Choisir un point au hasard B pour représenter la différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ notée $\vec{t}$.



3. Produit d'un vecteur par un réel

Définition

Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan, alors le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur ayant :
même ……………………………………… que $\vec{u}$.
même sens que $\vec{u}$ si ……………… et de sens contraire si ……………
$\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

Si $k=0$, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan $0\vec{u}=\cdots$. Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors pour tout réel $k\vec{0}=\cdots$ ...

Exemples

$\vec{u}$, $2\vec{u}$ et $\frac{2}{3}$ $\vec{u}$ ont même ………………………

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{-\frac{4}{3}u}$ ont ……………………………………..

Propriétés :

1) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$ 2) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$ 3) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

Représenter des vecteurs :

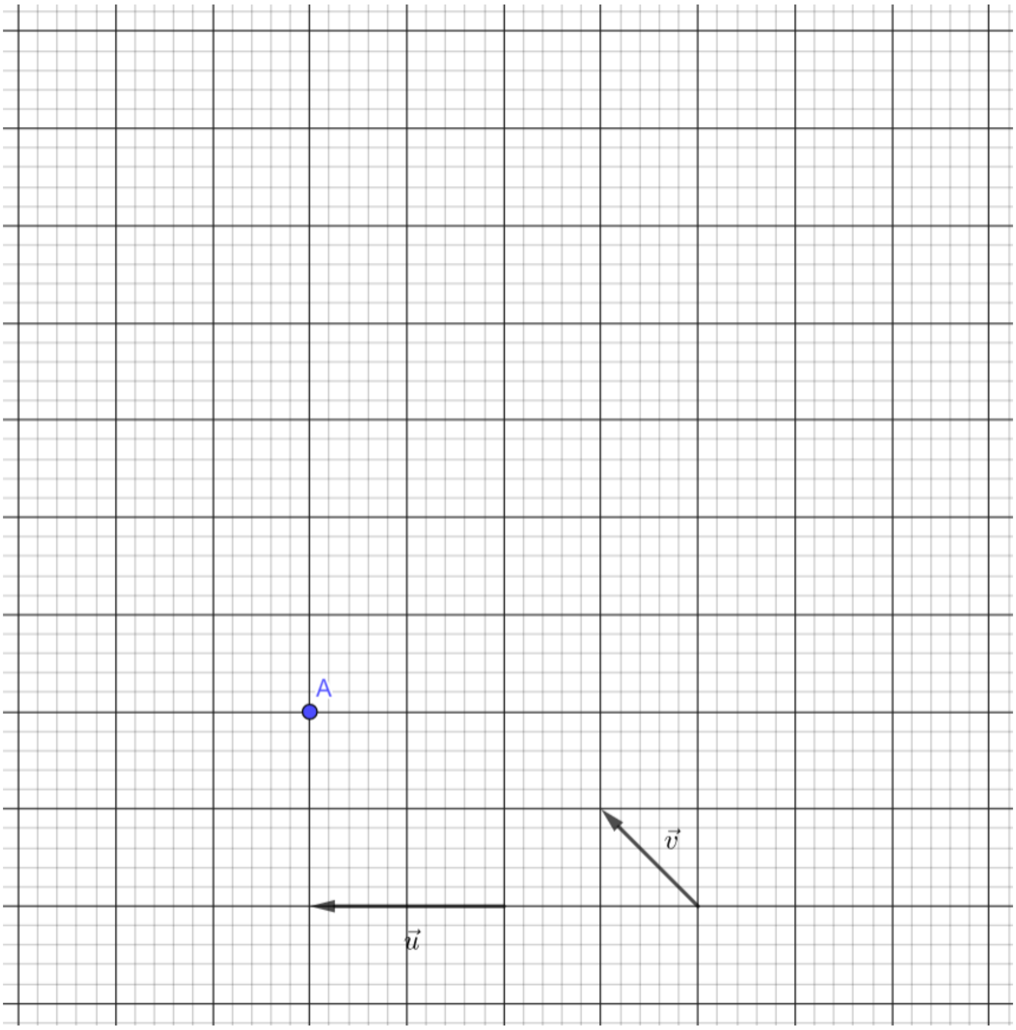
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soient A un point. Placer les points B, C, D et E tels que :

$\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$;

$\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$;

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{CA}$

et $\overrightarrow{ED} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$



Définition

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $\vec{u} \neq \vec{0}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$**
2) Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Par conséquent, deux vecteurs non nuls colinéaires, ont la même **direction**

Théorème (Alignement de points et parallélisme de droites)

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ....

Les droites (AB) et (CD) sont .... si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ....

Propriété : Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Exemples :

1) Simplifier une écriture vectorielle à l'aide de la relation de Chasles.

Soient A, B, C trois points du plan et D le point vérifiant $\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$. Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Placer C.

2) Prouver l'alignement de trois points :

Soient A, B, C trois points distincts du plan, D et E les points vérifiant $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et en déduire que les points A, D et E sont alignés. Faire le graphique.