LES NOMBRES

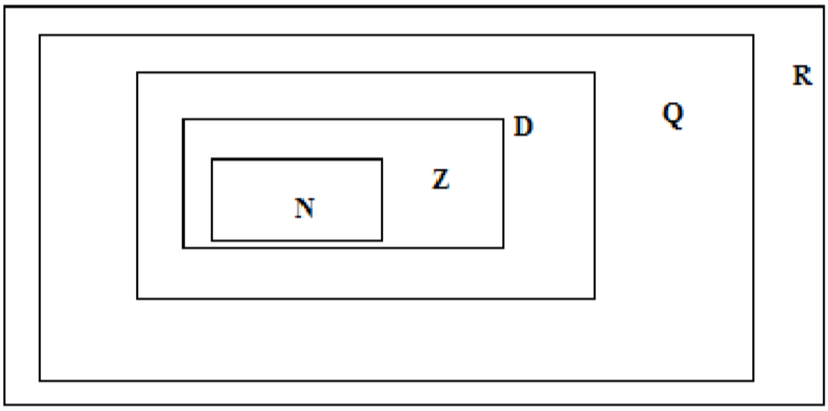
1. Ensembles de nombres

Définitions et notations :

On appelle :

- ensemble des nombres ..entiers... ...naturels, noté ....$\mathbb{N}$...., l'ensemble constitué des nombres 0, 1, 2,...,99, 100,101, etc. ;
- ensemble des nombres ..entiers ......relatifs, noté ....$\mathbb{Z}$....., l'ensemble constitué des nombres entiers naturels et de leurs opposés (par exemple -1, -11, 99, etc.) ;
- ensemble des ..décimaux............, noté ....$\mathbb{D}$........, l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$ où p est un entier relatif et n un entier naturel c'est à dire avec une écriture à virgule comportant un nombre fini de chiffres après la virgule (par exemple $15,678 = \frac{15678}{10^2}$) ;
- ensemble des nombres ..rationnels.., noté ...$\mathbb{Q}$........, l'ensemble des quotients d'entiers relatifs c'est à dire des nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs et b différent de 0.
- Ensemble des nombres ...réels......, noté ......$\mathbb{R}$.........., l'ensemble des abscisses des points de toute droite graduée (par exemple 1, -3, $\sqrt{2}$, π, etc.) ;

Appellation des nombres	Définition	Notation	Exemples
entiers naturel	Dénombrent les individus d'une population	$\mathbb{N}$	0 ; 1 ; 2 ; 3 ;... ; 99 ; 100 ; 101 ; etc.
entiers relatifs	Entiers naturels et leurs opposés	$\mathbb{Z}$	... ;-76 ;-75 ;... -2 ;-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 9 ; 10 ; 11 ; etc.
Nombres décimaux	de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec p entier relatif et n entier naturel	$\mathbb{D}$	1,3 ; 4,56 ; 98,4563
Nombres rationnels	de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs et b non nul	$\mathbb{Q}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$
Nombres reels	Abscisses des points de toute droite graduée	$\mathbb{R}$	1 ; 2,3 ; $\sqrt{2}$; π ;



Propriété, définition et notation :

- Tout nombre *entier naturel* est aussi un nombre ..entier relatif..., un nombre ..décimal....., un nombre ..rationnel..et un nombre ...réel....... ;
- tout nombre *entier relatif* est aussi un nombre ..décimal.., un nombre .rationnel. et un nombre ..réel.. ;
- tout nombre *décimal* est aussi un nombre ..rationnel... et un nombre ....réel........ ;
- tout nombre *rationnel* est aussi un nombre ..réel.......... .

Pour traduire cette propriété, on dit que l'ensemble des entiers naturels est ..inclus..... dans l'ensemble des entiers relatifs, lui-même ..inclus.. dans l'ensemble des nombres décimaux. L'ensemble des nombres décimaux est lui-même ..inclus..... dans l'ensemble des nombres rationnels qui est lui aussi ...inclus...... dans l'ensemble des nombres réels. On note ainsi :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où le symbole $A \subset B$ (lire « A ..inclus.... dans B ») signifie que tous les nombres de l'ensemble A appartiennent aussi à l'ensemble B.

Preuve :

- Si n est un nombre entier naturel, il est évidemment relatif, mais aussi .décimal. car il s'écrit $\frac{n}{10^0}$. Il est aussi ..rationnel. car il s'écrit $\frac{n}{1}$.
- même raisonnement pour ce qui concerne les entiers relatifs ;
- Tout nombre décimal s'écrit $\frac{p}{10^n}$ avec p entier relatif et n entier naturel ce qui montre que c'est aussi un nombre .rationnel.
- De manière évidente, les nombres rationnels sont des abscisses de points de toute droite graduée.

Exemples :

- 5 est un nombre entier naturel. Il s'écrit aussi $5,0$ donc c'est un nombre décimal et il s'écrit encore $\frac{5}{1}$ donc c'est un ..rationnel .
- $345,6782$ est un nombre décimal. Il s'écrit aussi $\frac{3456782}{1000}$ donc c'est un nombre ....décimal. .

Propriété et définition :

> Il existe des nombres *réels* qui ne sont pas *rationnels*. On les appelle des nombres ...irrationnels........ . Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Nous le montrerons dans le paragraphe sur les nombres premiers. Nous admettrons que le nombre π est un autre exemple de nombre irrationnel.

La propriété suivante permet de distinguer les nombres *rationnels* des nombres *irrationnels* :

Propriété :

> Un nombre réel est *rationnel* si et seulement si il admet une écriture décimale illimitée qui est ...périodique........ ,c'est à dire constituée d'une série de chiffres après la virgule qui ...se... ...répète...... .

Preuve :

Admise.

Exemples :

- $\frac{19}{11} \approx 1,7272727272$ de période 72 ;
- $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ d'écriture non périodique ;
- $\frac{3}{7} \approx 0,428571428$ de période 428571 ;
- les nombres décimaux ont évidemment une écriture décimale illimitée périodique dont la période est 0 : par exemple 3,45 s'écrit 3,450000....

2. Intervalles de nombres réels

Définition :

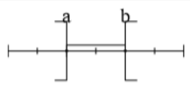
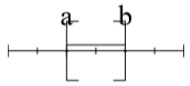
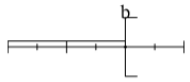
On appelle ensemble des nombres ....réels...., noté ....$\mathbb{R}$...., l'ensemble des abscisses des points de toute droite graduée (par exemple 1, -3, $\sqrt{2}$, π, etc.) ;

Définitions :

Soient a et b deux nombres réels avec a inférieur strictement à b.

- $[a; b]$ est l'ensemble des réels x tels que ..$a \leq x \leq b$.. . On l'appelle ..intervalle.. ..fermé.. d'extrémités a et b.
- $]a; b[$ est l'ensemble des réels x tels que ..$a < x < b$.. . On l'appelle ..intervalle.. ..ouvert.. d'extrémités a et b.
- $[a; b[$ est l'ensemble des réels x tels que ..$a \leq x < b$.. . Cet intervalle est dit ..ouvert.. en b et ..fermé.. en a.
- $[a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que ..$x \geq a$..
- $]-\infty; b[$ est l'ensemble des réels x tels que ..$x < b$..

Exemples de représentation sur une droite graduée :

..$]a;b[$..	
..$[a;b]$..	
..$]-\infty;b[$..	

Définition :

Soient I et J deux intervalles.

- *L'intersection* de I et J notée $I \cap J$ est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I et à J.
- *La réunion* de I et J notée $I \cup J$ est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J, c'est à dire soit à I, soit à J, soit aux deux.
- Lorsque les intervalles I et J n'ont aucun point commun, leur intersection est l'ensemble vide noté $\emptyset$. On dit aussi que les intervalles sont disjoints.

Exemple [Savoir déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles] :

Soit $I = [-5; -1]$ et $J = [-2; 3]$.

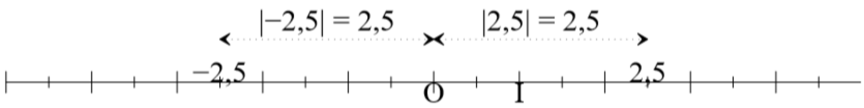
L'intersection $I \cap J$ est $[-2 ; -1]$

La réunion $I \cup J$ est $[-5 ; 3]$

3. Valeur absolue

Définition :

On appelle *valeur absolue* d'un nombre x et on note $|x|$ la ..distance à zéro.. du nombre x.



Exemples :

- $-|-\sqrt{16}| = -|-4| = -4$
- $|x| = \frac{3}{2}$ lorsque $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$.

Propriétés :

- La distance entre deux nombres x et y est égale à ..la valeur absolue de la différence.. entre les deux nombres x et y c'est à dire à $|x - y|$.
- Soient a et x deux réels, ainsi qu'un réel positif r.
  Alors $|x - a| \leq r$ si et seulement si $x \in [a - r ; a + r]$

Preuve :
Découle directement du fait que la valeur absolue est aussi la distance à zéro.

Exemples :

- $|x - 1| = 2$ signifie $x = 1 - 2$ ou $x = 1 + 2$ c'est à dire $x = -1$ ou $x = 3$.
- $|x - 4| < 3$ signifie $4 - 3 < x < 4 + 3$ c'est à dire $1 < x < 7$ ou $x \in]1 ; 7[$;
- $|x + 2,5| < 2$ signifie $|x - (-2,5)| < 2$ c'est à dire $2,5 - 2 < x < 2,5 + 2$ donc $1,5 < x < 4,5$;
- $|x-2| \leq 3$ équivaut à $-3 \leq x - 2 \leq 3$ c'est à dire à $-3 + 2 \leq x \leq 3 + 2$ ou encore $-1 \leq x \leq 5$ c'est à dire encore $x \in [-1 ; 5]$

Propriété :

Pour touts les réels a, $\sqrt{a^2} = |a|$.