Information chiffrée

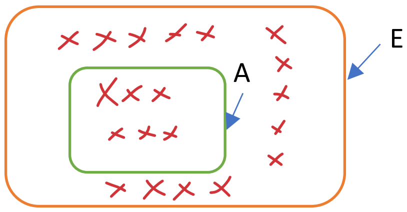
1. Proportions et pourcentages

Définition : proportion d'un élément dans un ensemble

Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments et A un sous-ensemble de E.
On note n_A et n_E respectivement le nombre d'éléments de E et de A.
La **proportion (ou**..fréquence..**)** d'éléments de A dans E est le réel défini par $p = \cdots$ ...

Exemple :

Dans la figure ci-contre $n_A = 6$ et $n_B = 20$. Représenter les éléments avec des croix, calculer p et faire une phrase de synthèse.



Propriété :

La proportion d'éléments de A parmi ceux de E est un réel compris entre .0. et .1.

Démonstration : $n_A > 0$ et $n_A < n_E$

donc $0 < \frac{n_A}{n_B} < 1$

Définition du pourcentage

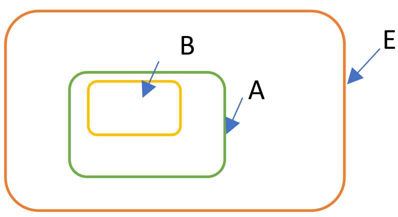
Le pourcentage d'éléments de A parmi ceux de E est $\frac{n_A}{n_E} \times$ ..100

Propriété : pourcentage et proportion

Si on note p la proportion d'éléments de A parmi ceux de E et T le pourcentage associé, alors $p = \frac{T}{100}$ ou $T = 100p$.

Propriété : pourcentage de pourcentage

Soit p_1 la proportion de B dans A.
Soit p_2 la proportion de A dans E.
Alors la proportion de B dans E est $p_1 \times p_2$.



Exemple :

1. **Une entreprise de 1 200 salariés emploie 90 cadres et 1 110 ouvriers. Parmi les cadres, il y a 54 femmes et, parmi les ouvriers, il y a 333 femmes.**
a. **Quelle est la proportion de cadre dans l'entreprise ?**
b. **Quelle est la proportion de femmes chez les cadres ?**
Chez les ouvriers ? Dans toute l'entreprise ?

2. **Au lycée Poincaré, 86 % des élèves ont un téléphone portable. Parmi ceux-ci, 40 % ont un Uphone (marque très en vogue de smartphone).**
a. **Quel est le pourcentage d'élèves qui ont un UPhone parmi l'ensemble des élèves du lycée ?**
b. **Sachant qu'il y a 1 500 élèves au lycée, combien d'élèves ont un UPhone ?**

Solution

1.a. On peut dresser un tableau à double entrée qui clarifie les données de l'énoncé :

	Cadres	Ouvriers	Total
Femmes	54	333	
Hommes			
Total	90	1 110	1 200

Il y a 90 cadres dans l'entreprise et 1 200 salariés dans l'entreprise. La proportion de cadres dans l'entreprise est $\frac{90}{1\,200} = 0,075$.

b. Il y a 54 femmes parmi les 90 cadres.
La proportion de femmes parmi les cadres est de $\frac{54}{90} = 0,6$.
Il y a 333 femmes parmi les 1 110 ouvriers. Ainsi la proportion de femmes parmi les ouvriers est de $\frac{333}{1\,110} = 0,3$.
Il y a $54 + 333 = 387$ femmes dans l'entreprise, et 1 200 salariés au total. La proportion de femmes dans l'entreprise est de $\frac{387}{1\,200} = 0,3225$.

2.a. Le pourcentage des élèves ayant un Uphone parmi les élèves qui ont un téléphone est de 40 %, soit une proportion $p_1 = \frac{40}{100} = 0,4$.
Le pourcentage des élèves qui ont un téléphone parmi l'ensemble des élèves du lycée est de 86 %, soit une proportion $p_2 = \frac{86}{100} = 0,86$.
La proportion des élèves ayant un Uphone parmi les élèves du lycée est :
$$p = p_1 \times p_2 = 0,4 \times 0,86 = 0,344$$
ce qui correspond à un pourcentage de $0,344 \times 100 = 34,4$ %.

b. Notons n le nombre d'élèves au lycée et n_I ceux qui ont un Uphone.
La proportion des élèves qui ont un Uphone parmi les élèves du lycée est $p = \frac{n_I}{n}$, donc $0,344 = \frac{n_I}{1\,500}$ ce qui donne
$$n_I = 1\,500 \times 0,344 = 516.$$

2. Taux d'évolution et coefficient multiplicateurs

Définitions : Evolution absolue, taux d'évolution et coefficient multiplicateur

> On considère, une quantité initiale VI (strictement positive) et une quantité finale VF.
> La **variation absolue Δ V** est donnée par Δ V=VF − VI
> Le **taux d'évolution *t*** (variation relative) est donné par $t = \frac{VF - VI}{VI} = \frac{\Delta V}{VI}$
>
> Le **coefficient multiplicateur CM** associé à ce taux d'évolution est donné par CM=1+t.

Remarques :

- $t > 0$ signifie que VF > VI et $t < 0$ signifie que VF < VI
- Si on connait « t » le pourcentage d'évolution alors CM=1+$\frac{t}{100}$.
- Lors d'une augmentation $t > 0$ et CM>1 , lors d'une diminution $t < 0$ et CM<1.

Théorème :

> On considère une quantité initiale VI et une quantité finale VF.
>
> Si CM est le coefficient multiplicateur associé à cette évolution, alors :
> CM × VI = VF et CM $= \frac{VF}{VI}$.

Démonstration : $t = \frac{VF - VI}{VI} \Leftrightarrow t\,VI = VF - VI \Leftrightarrow t\,VI + VI = VF$

$\Leftrightarrow (t+1)\,VI = VF$

$\Leftrightarrow CM \times VI = VF$

Exemple :

■ **Un verre a un prix de 5 € et une assiette de 3 €. Le prix du verre augmente de 24 % et le prix de l'assiette baisse de 16 %.**

1. Déterminer le coefficient multiplicateur associé à chacune de ces variations.

2. Calculer le prix du verre et de l'assiette après ce changement de prix.

➜ Comment faire ?
Le coefficient multiplicateur de chaque évolution est par définition $CM = 1 + \frac{t}{100}$.
Le nouveau prix se calcule en utilisant le résultat du cours VI × CM = VF.

Solution

1. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 24 % du prix du verre est :

$$CM_1 = 1 + \frac{24}{100} = 1{,}24.$$

Le coefficient multiplicateur associé à une réduction de 16 % du prix de l'assiette est :

$$CM_2 = 1 - \frac{16}{100} = 0{,}84.$$

2. La valeur initiale du verre est $VI_1 = 5$;
ainsi on a $VI_1 \times CM_1 = VF_1$
$5 \times 1{,}24 = VF_1$, c'est-à-dire $6{,}2 = VF_1$
Après une augmentation de 24 %, le verre sera vendu au prix de 6,20 €.
La valeur initiale de l'assiette est $VI_2 = 3$;
ainsi on a $VI_2 \times CM_2 = VF_2$
$3 \times 0{,}84 = VF_2$, c'est-à-dire $2{,}52 = VF_2$
Après une réduction de 16 %, l'assiette sera vendue au prix de 2,52 €.

3. Evolutions successives et évolution réciproque

Définition :

Soit une quantité dont la valeur initiale est V_0, avec $V_0 > 0$. Elle subit n évolutions successives à des taux respectifs de $t_1, t_2, \dots, t_n$ et prend respectivement des valeurs $V_1, V_2, \dots, V_n$.
Le taux d'évolution t qui permet de passer de V_0 à V_n est appelé **taux d'évolution global**.
Le coefficient multiplicateur est appelé le **coefficient multiplicateur global.**

Théorème

Si on note $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$ les coefficients multiplicateurs associés aux taux $t_1, t_2, \dots, t_n$ alors le coefficient multiplicateur global associé à ces n évolutions successives est : $CM = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$

Représentation :

Définition :

On considère une quantité et on note t le taux qui permet de passer de VI à VF.
Le taux réciproque de t est le taux t' qui permet de passer de VF à VI.

Théorème :

Soient une quantité initiale VI $(VI > 0)$ et une quantité finale VF. Soit t le taux qui permet de VI à VF et CM le coefficient multiplicateur associé à t.

Soit t' le taux réciproque de t , c'est-à-dire le taux qui permet de passer de VFà VI.
Alors le coefficient multiplicateur associé à t' est $CM' = \frac{1}{CM}$.

Exemple :

**Un article voit son prix augmenter successivement de 10 %, de 6 %, puis de 8 %.
Puis en période de solde, son prix baisse de 16 %.
Quel est son taux d'évolution global ?
À quel pourcentage cela correspond-il ? (On donnera deux décimales de précision pour le pourcentage.)**

→ **Qu'est-ce qu'on demande ?**
Trouver le taux global d'évolution associé à 4 variations successives exprimées sous forme de pourcentages.

→ **Comment faire ?**
Il faut tout d'abord calculer le coefficient multiplicateur associé à chaque taux d'évolution (c'est-à-dire à chacun des pourcentages fournis par l'énoncé), pour pouvoir calculer le coefficient multiplicateur global en les multipliant. Enfin on pourra en déduire le taux global d'évolution.

Solution

Les coefficients multiplicateurs associés aux augmentations successives de 10 %, 6 % et 8 % puis à la réduction de 16 % sont respectivement :

$CM_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$ $\quad CM_2 = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$

$CM_3 = 1 + \frac{8}{100} = 1,08$ $\quad CM_4 = 1 - \frac{16}{100} = 0,84$

Le coefficient multiplicateur global est donc :

$$CM = 1,1 \times 1,06 \times 1,08 \times 0,84 = 1,0578$$

Le taux global d'évolution est donc :

$$t = CM - 1 = 0,0578.$$

Ce taux global correspond donc à une augmentation de $0,0578 \times 100 = 5,78\,\%$.