Géométrie repérée

1. Base normée, orthogonale ou orthonormale pour repérer des vecteurs

Définition

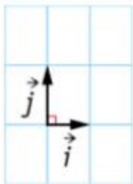
On dit que les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ forment une **base** de l'ensemble des vecteurs du plan, s'ils ne sont pas colinéaires.

Remarque

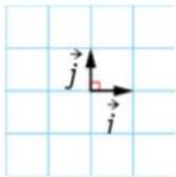
Avec ces deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ on peut former deux bases qu'on note $(\vec{i}, \vec{j})$ ou $(\vec{j}, \vec{i})$.

Si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, on dit que la base est **normée.**

Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires, on dit que la base est **orthogonale.**



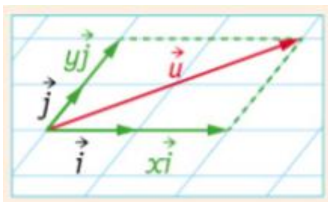
Si la base est normée et orthogonale on dit qu'elle est **orthonormée.**



Théorème et définition

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base des vecteurs du plan.
Quel que soit le vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Ce couple s'appelle les corodonnées du vecteur $\vec{u}$.

x est son **abscisse.** et y son **ordonnée.**



2. Egalité, somme de vecteurs et produit d'un vecteur par un réel

Théorème

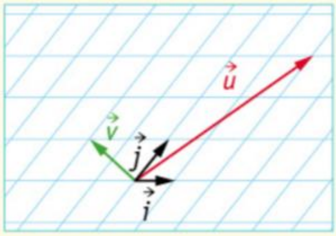
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base des vecteurs du plan. Dans laquelle on a les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$ où x, y, x'et y' sont des réels.

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x\prime \\ y+y\prime \end{pmatrix}$. Pour tout réel k, $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemples

■ Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-contre.
1. Exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, puis le vecteur $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



■ Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de vecteurs du plan dans laquelle on considère les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

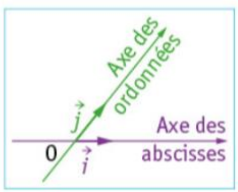
Calculer les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$; $-\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $2\vec{u}$ et $-\frac{3}{2}\vec{v}$.

3. Repère du plan pour repérer des points

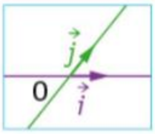
Définition

Soit O un point du plan et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base des vecteurs du plan.
On dit que le triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère du plan et O est l'origine du repère.

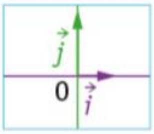
La droite passant par O et dirigée par $\vec{\imath}$ est appelée axe des abscisses.
La droite passant par O et dirigée par j est appelée axe des ordonnées.



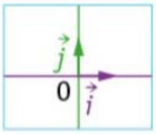
Lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est normée, on dit que le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ est **normé.**



Lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthogonale, on dit que le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ est **orthogonal.**



Lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée, on dit que le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormé.**

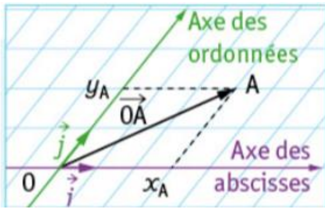


Définition

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et A un point quelconque du plan.

Les coordonnées du point A dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

.



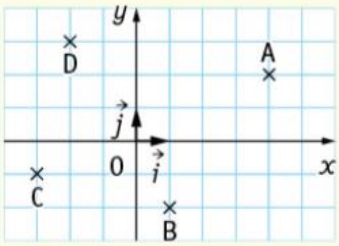
Exemple :

■ **Soit $(0; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.**

Déterminer les coordonnées :

a. des points A, B, C et D dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$;

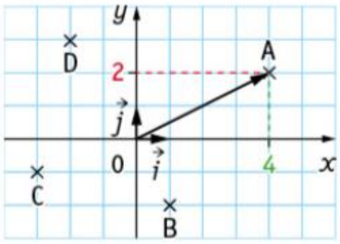
b. des points C et D dans le repère $(B; \vec{i}, \vec{j})$.



➜ Comment faire ?

Les coordonnées d'un point M dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on projette le point M sur l'axe des abscisses pour lire son abscisse, puis on projette M sur l'axe des ordonnées, pour lire son ordonnée.



Théorème

Soient les points $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exemple :

Soient $A\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ dans un repère du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

4. Longueur (norme) d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et coordonnées du milieu d'un segment $[AB]$

Théorème

Soient les points $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé. Alors :

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- I milieu de $[AB]$ équivaut à $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

Exemple : Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ et les coordonnées des points J et K milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ sachant que le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé.

5. Déterminant, colinéarité de vecteurs, parallélisme de droites, alignement de points

Définition

Soit O un point du plan et $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base des vecteurs du plan et soient les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ x, y, x' et y' sont des réels. Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y$. On le note aussi $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Théorème

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration : 73 page 211 LLS

Propriétés

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (et donc leur déterminant est nul).
- Trois points du plan sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (et donc leur déterminant est nul).

Exemples :

■ **Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée du plan. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$.**
Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et $\det(\vec{u}, \vec{w})$.

Conclure.

■ **Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.**

a. **Soient $A(-5 ; -9)$, $B(3 ; 7)$ et $C(1 ; 3)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?**

b. **Soient $A(-1 ; 2)$; $B(0 ; -5)$; $C(2 ; 5)$ et $D(-3 ; 4)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?**