Fonctions affine et carré

1. Caractérisation des fonctions affines

Définitions

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = mx + p$
- Les nombres m et p sont appelés respectivement ….coefficient directeur…. et ….ordonnée à l'origine…. de f (plus exactement de sa représentation graphique qui est une droite).

Cas particuliers

Si f est une fonction affine telle que :

- $m = 0$, alors la fonction f est une fonction ….constante….
- $p = 0$ alors la fonction f est une fonction ….linéaire….

Propriété : taux d'accroissement constant

Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, appelé taux d'accroissement de f entre a et b, est constant.

Démonstration (LLS page 96) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb-ma}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$

Conséquence

Soit f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et a et b deux réels distincts. Alors, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$. Le taux d'accroissement de f est le coefficient directeur de f.

Exemples : a) Déterminer la fonction affine telle que $f(0) = -5$ et $f(1) = -2$.
b) Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Justifier. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

a) $f(x) = mx + p$ et $a = 0$ et $b = 1$ donc $m = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{-2-(-5)}{1-0}$
$m = 3$. $f(x) = 3x + p$ or $f(0) = -5$ donc $p = -5$
ainsi $f(x) = 3x - 5$. On avait aussi $f(1) = -2$ donc
$3 \times (1) + p = -2$. On retrouve bien $p = -5$

b) • $f(x) = 1x + 1$ donc $m = 1$ et $p = 2$
• $\frac{g(1)-g(0)}{1-0} = \frac{1^2-1-(-1)}{1} = 1$ et $\frac{g(2)-g(1)}{2-1} = \frac{3-0}{1} = 3$
$1 \neq 3$ donc g n'est pas une fonction affine.

2. Représentation graphique des fonctions affines

Propriété

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction affine est une …………………… qui coupe l'axe des ordonnées.

Conséquence

Soit f une fonction affine défi ie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Pour représenter f, il suffit de placer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$ puis de tracer la droite (avec ……………………) passant par ces deux points.

Exemple : Représenter dans un repère orthonormé , les fonctions affines suivantes : $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$, $g(x) = -3x + 7$ et $h(x) = 2x - 3$. Conjecturer les coordonnées du point d'intersection de g et h (ou plus rigoureusement des droites associées) et démontrer cette conjecture.

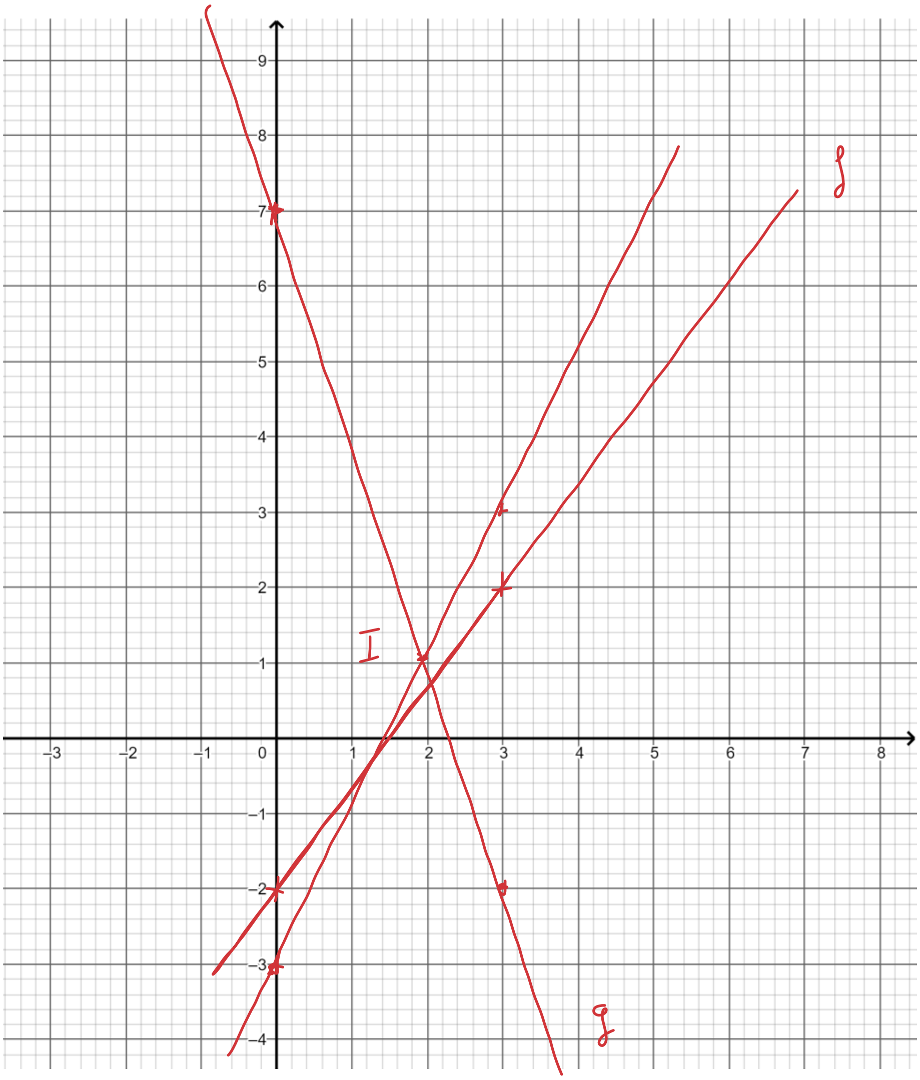
x	0	3
$f(x)$	-2	2
$g(x)$	7	-2
$h(x)$	-3	3

Il semble que $I(2;1)$

$g(2) = -3 \times 2 + 7 = 1$

$h(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$

donc $I(2;1)$



3. Variations et parité d'une fonction affine

Propriété:

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Si $m > 0$, alors f est une fonction strictement croissante.

Si $m < 0$, alors f est une fonction strictement croissante

Démonstration et tableaux de variations :

$m > 0$

$a < b$

$ma < mb$

$ma + p < mb + p$

$f(a) < f(b)$

$m < 0$

$ma > mb$

$ma + p > mb + p$

$f(a) > f(b)$

x	$-\infty$	$-p/m$	$+\infty$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$	$-p/m$	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\searrow$

f impaire $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow m(-x) + p = -(mx + p)$

$\Leftrightarrow -mx + p = -mx - p \Leftrightarrow p = -p \Leftrightarrow 2p = 0 \Leftrightarrow p = 0$

donc f linéaire

f paire $\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \Leftrightarrow m(-x) + p = mx + p \Leftrightarrow -mx = mx$

$\Leftrightarrow 2mx = 0 \Leftrightarrow m = 0$ car $x \in \mathbb{R}$

donc f constante.

Propriété

- f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
- f est une fonction impaire si et seulement si f est une fonction linéaire.
- f est une fonction paire si et seulement si f est une fonction constante.

Démonstration : 91 p 111 LLS

4. Signe d'une fonction affine

Propriété:

> f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
>
> Si $m \neq 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$
>
> Si $m > 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{p}{m}$
>
> .Si $m < 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{p}{m}$
>
> f est du signe de m à droite de la racine $x = -\frac{p}{m}$.

Tableaux de signes - Démonstration 84 p 111 LLS

$mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = \frac{-p}{m}$

$m > 0$

x		$-p/m$	
signe de f	$-$	0	$+$

$m < 0$

signe		$-p/m$	
de f.	$+$	0	$-$

Conséquence:

> Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions affines, on étudie le signe de chacune des fonctions dans un même tableau de signes et on conclura à l'aide de la « règle des signes » d'un produit ou d'un quotient.

Exemples : Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=-3x-4 puis résoudre les inéquations $(-3x - 4)(2x + 1) \leq 0$ et $\frac{-3x-4}{2x+1} \geq 0$

- $-3x - 4 = 0 \Leftrightarrow -3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$-4/3$		$+\infty$
signe de $-3x+4$		$+$	0	$-$	

signe de (-3)

-

x	$-\infty$		$-4/3$		$-1/2$		$+\infty$
signe de $-3x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(-3x+4)(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$

$S = \left]-\infty ; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

-

x	$-\infty$		$-4/3$		$-1/2$		$+\infty$
signe de $\frac{-3x-4}{2x+1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$S = \left[-\frac{4}{3} ; -\frac{1}{2}\right[$

5. Fonction carré

Définition :

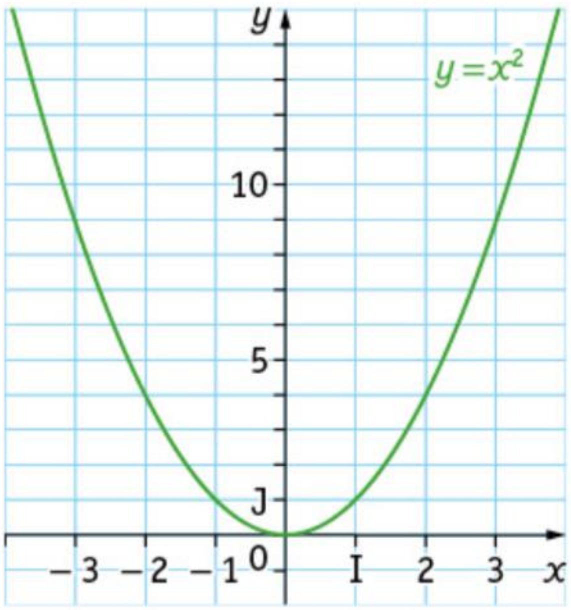
On appelle fonction carré la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = x^2$.

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carré est une ...parabole........ Son équation est $y = x^2$.

Le point 0, origine du repère, est appelé ...sommet.........de la parabole.

Représentation graphique

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



Exemple : Déterminer l'image de 3 et les antécédents de 4 par f? -2 possède-t-il des antécédents par f ? $f(3)=9$. $f(x)=4 \iff x=-2$ ou $x=2$. -2 ne possède pas d'antécédent par f.

Propriétés :

- Tout nombre réel x admet un carré et $x^2 \geq 0$, tous les points de la parabole sont donc au-dessus ou sur l'axe des abscisses.
- La fonction carré est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Tableau de variations et démonstrations (48 p 133 LLS)

- $x^2 = (x)(x) \geq 0$ (règle des signes)
- $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ donc f est paire
- Supposons $a, b \geq 0$ et $a < b$ (donc $b - a > 0$)

  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) < 0$ car $a - b < 0$ et $a + b > 0$

  donc $a^2 - b^2 < 0$ et $a^2 < b^2$ ainsi f strictement croissante
- Supposons $a, b \leq 0$ et $a < b$

  $a^2 - b^2 = \underset{\ominus}{(a-b)}\,\underset{\ominus}{(a+b)} \geq 0$

  donc $a^2 - b^2 \geq 0$ et $a^2 \geq b^2$ donc $f(a) \geq f(b)$

  f décroissante

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exemples : Comparer les images par la fonction carrée de 5 et 7 puis de -6 et -3.

$5^2 < 7^2$

$(-6)^2 > (-3)^2$

6. Résolution d'équations et d'inéquations : $x^2 = k; x^2 > k, x^2 < k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations inéquations suivantes :

a) $x^2 = 2$ b) $x^2 = -3$ c) $x^2 < 5$ d) $x^2 > 9$ e) $x^2 > 0$

a) $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

b) $S = \emptyset$

c) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ $S =]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$

d) $S =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

e) $S = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.