Fonctions affine et carré

1. Caractérisation des fonctions affines

Définitions

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = mx + p$
- Les nombres m et p sont appelés respectivement ……………………… et ………………………… de f (plus exactement de sa représentation graphique qui est une droite).

Cas particuliers

Si f est une fonction affine telle que :

- $m = 0$, alors la fonction f est une fonction ……………………
- $p = 0$ alors la fonction f est une fonction ………………………

Propriété : taux d'accroissement constant

Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, appelé taux d'accroissement de f entre a et b, est constant.

Démonstration (LLS page 96)

Conséquence

Soit f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et a et b deux réels distincts. Alors, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$. Le taux d'accroissement de f est le coefficient directeur de f.

Exemples : a) Déterminer la fonction affine telle que $f(0) = -5$ et $f(1) = -2$.
b) Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Justifier. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

2. Représentation graphique des fonctions affines

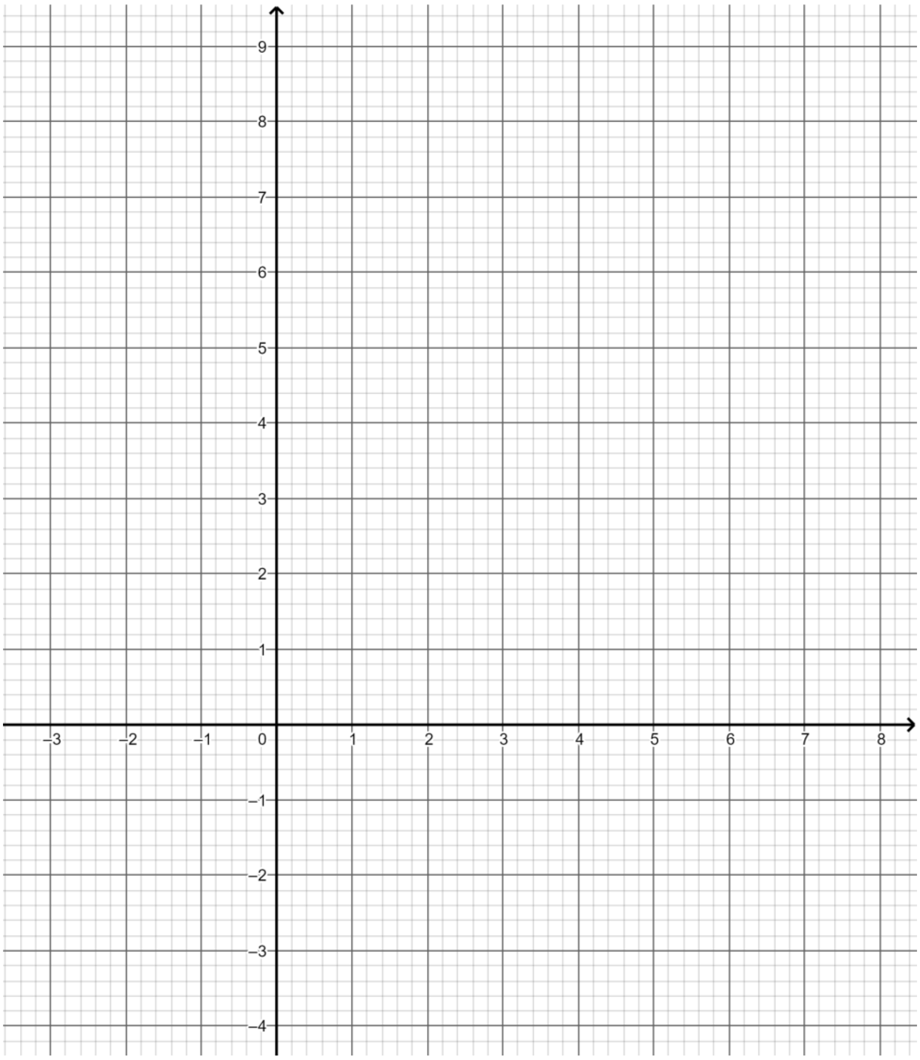
Propriété

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction affine est une …………………… qui coupe l'axe des ordonnées.

Conséquence

Soit f une fonction affine défi ie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Pour représenter f, il suffit de placer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$ puis de tracer la droite (avec ……………………) passant par ces deux points.

Exemple : Représenter dans un repère orthonormé , les fonctions affines suivantes : $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$, $g(x) = -3x + 7$ et $h(x) = 2x - 3$.
Conjecturer les coordonnées du point d'intersection de g et h (ou plus rigoureusement des droites associées) et démontrer cette conjecture.



3. Variations d'une fonction affine

Propriété:

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Si $m > 0$, alors f est une fonction strictement croissante.

Si $m < 0$, alors f est une fonction strictement croissante

Démonstration et tableaux de variations :

Propriété

- f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
- f est une fonction impaire si et seulement si f est une fonction linéaire.
- f est une fonction paire si et seulement si f est une fonction constante.

Démonstration : 91 p 111 LLS

4. Signe d'une fonction affine

Propriété:

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Si $m \neq 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$

Si $m > 0$, alors$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{p}{m}$

.Si $m < 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{p}{m}$

f est du signe de m à droite de la racine $x = -\frac{p}{m}$.

Tableaux de signes - Démonstration 84 p 111 LLS

Conséquence:

Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions affines, on étudie le signe de chacune des fonctions dans un même tableau de signes et on conclura à l'aide de la « règle des signes » d'un produit ou d'un quotient.

Exemples : Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=-3x-4 puis résoudre les inéquations $(-3x - 4)(2x + 1) \leq 0$ et $\frac{-3x-4}{2x+1} \geq 0$

5. Fonction carré

Définition :

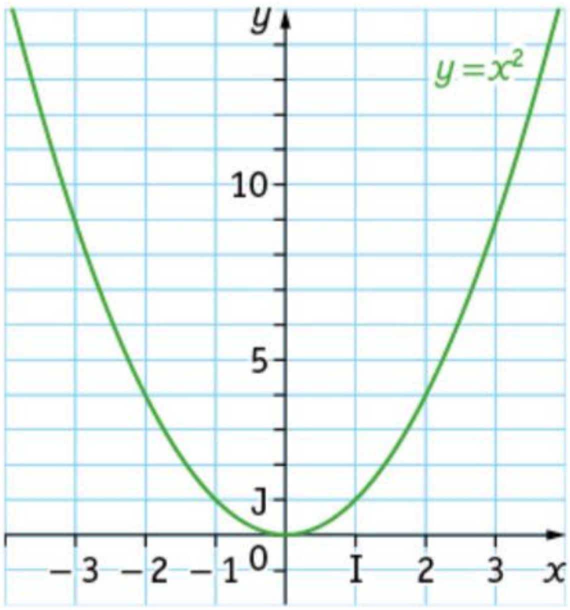
On appelle fonction carré la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = x^2$.

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carré est une .... Son équation est $y = x^2$.

Le point 0, origine du repère, est appelé ....de la parabole.

Représentation graphique

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$							



Exemple : Déterminer l'image de 3 et les antécédents de 4 par f ? -2 possède-t-il des antécédents par f ?

Propriétés :

- Tout nombre réel x admet un carré et $x^2 \geq 0$, tous les points de la parabole sont donc au-dessus ou sur l'axe des abscisses.
- La fonction carré est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Tableau de variations et démonstrations (48 p 133 LLS)

Exemples : Comparer les images par la fonction carrée de 5 et 7 puis de -6 et -3.

Compléter avec $<$, $>$ ou $=$ sans calculatrice.

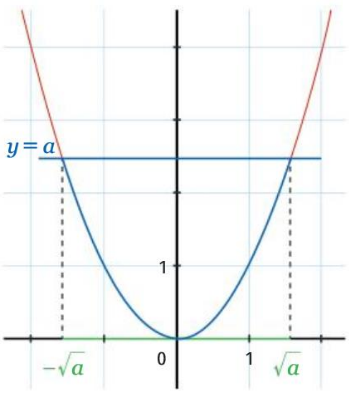
1. $1{,}125^2 \dots 1{,}13^2$ **2.** $(-3{,}21)^2 \dots (-2)^2$ **3.** $(-3)^2 \dots 3^2$ **4.** $\pi^2 \dots 3^2$ **5.** $(-999)^2 \dots (-1000)^2$

6. Résolution d'équations et d'inéquations : $x^2 = k ; x^2 > k, x^2 < k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Soit a un nombre réel.

Propriété

On considère l'équation $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
- si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution ;
- si $a = 0$, l'équation a pour unique solution $x = 0$;
- si $a > 0$, l'équation a deux solutions : $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.



DÉMONSTRATION Voir exercice **82** p. 137

Propriété

On considère l'inéquation $x^2 \leqslant a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
- si $a < 0$, l'inéquation n'a pas de solution ;
- si $a = 0$, l'inéquation a pour unique solution $x = 0$;
- si $a > 0$, l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\sqrt{a} ; \sqrt{a}]$.

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations inéquations suivantes :

a) $x^2 = 2$ b) $x^2 = -3$ c) $x^2 < 5$ d) $x^2 > 9$ e) $x^2 > 0$

+LLS page 124