Représentation graphique et algébrique d'une fonction – lectures graphiques

1. Courbe représentative d'une fonction

Définition

L'...ensemble...de...définition... d'une fonction f est formé de tous les nombres x pour lesquels $f(x)$ ...existe..... et est ...calculable.....

Exemples :

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ est $D_f = \mathbb{R}$

Le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x+3}$ est $D_f =$ ...$]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$...

$= \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Déterminer un domaine de définition : comment faire ?

Qu'est-ce qu'on demande ?

Cherchez l'ensemble de définition d'une fonction f c'est chercher l'ensemble des réels x pour lesquels le calcul de f est possible.

Comment faire ?

On décompose le calcul de f en une suite d'opérations élémentaires à partir du réel x ; addition, produit, élévation à une puissance, passage à l'inverse quotient, calcul de la racine carrée permis à chaque étape on examine la possibilité de passer à l'étape suivante

Définition

Soit f est une fonction définie sur un ensemble D.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on appelle C_f courbe représentative de f, l'ensemble des ...points..... du plan de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $y = f(x)$, le réel x prenant ...TOUTES..... les valeurs possibles de D.

Remarques :

- Si le point $M(x_M; y_M)$ est un point de C_f alors x_M est un réel appartenant à D_f et les coordonnées de M vérifient l'équation de la courbe $y_M = f(x_M)$.

Déterminer b sachant $A(-2; b) \in C_f$ d'équation $y = x^2 + 2x$ définie sur $[-3\,; 2]$ $\quad b =$ $(-2)^2 + 2(-2)$
$= 4 - 4 = 0$

- Soit $M(x_M; y_M)$, un point du plan. Si x_M est un réel appartenant à D_f et si $y_M = f(x_M)$, alors M appartient à la courbe représentative de la fonction f.

f est la fonction précédente . Les points $A(1; 3), B(-1; 4)$ et $C(-\frac{7}{2}; \frac{21}{4})$ sont-ils des points de C_f?

Déterminer l'appartenance d'un point du plan à la courbe représentative d'une fonction.

Qu'est-ce qu'on demande ?

Savoir si un point du plan à partir ou non à la courbe représentative d'une fonction f.

Un point $(x_M; y_M)$ appartient à la courbe représentative d'une fonction f si et seulement si x_M appartient à l'ensemble de définition de la fonction et si $y_M = f(x_M)$.

Comment faire ?

Deux conditions sont donc à vérifier successivement : $x_M \in [-3\,; 2]$ et $f(x_M) = y_M$.et une lecture graphique sur la calculatrice peut être faite mais avec précaution car il y a toujours l'incertitude de la lecture.

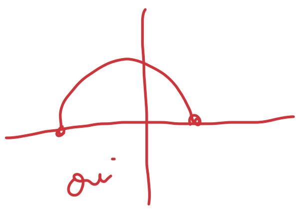
$1 \in [-2; 3]$ et $f(1) = 1^2 + 2(1) = 1 + 2 = 3$ donc $A \in C_f$

$-1 \in [-2; 3]$ et $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = 1 - 2 = -1 \neq 4$ donc $B \notin C_f$

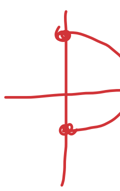
$-\frac{7}{2} = -3{,}5 \notin [-2; 3]$ donc $C \notin C_f$

- Attention, toute courbe même simple n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

Un demi-cercle est-il la courbe représentative d'une fonction ?



oui



Non

- Pour tracer la courbe représentative d'une fonction dans un repère donné, il faudrait calculer les coordonnées de tous les points de la courbe (une infinité) ce qui est impossible. On détermine quelques points « bien choisis » (on peut s'aider de la calculatrice) et l'on relie ces points d'une « manière simple ».

Représenter la courbe représentative de la fonction f

x | -3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y | 3	0	-0,75	-1	-0,75	0	1,25	3	8	15

2. Fonctions paires, fonctions impaires

Définition d'une fonction paire

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que la fonction f est paire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $x \in D$, le réel $-x$ appartient à D
- pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$

Théorème (admis)

Soit f une fonction paire. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Démontrer la parité d'une fonction

Soit f définie sur [-2 ;2] par $f(x) = x^4 - 3x^2$. Démontrer que la fonction f est paire.

$x \in [-2;2]$, $-x \in [-2;2]$ et $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2$. Or
$(-x)^4 = (-x)(-x)(-x)(-x) = x^4$ et $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$
donc $f(-x) = x^4 - 3x^2 = f(x)$. Donc f est paire.

Définition d'une fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que la fonction f est impaire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $x \in D$, le réel $-x$ appartient à D
- pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

Théorème (admis)

Soit f une fonction impaire. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Démontrer la parité d'une fonction

Soit f définie sur [-2 ;2] par $f(x) = x^3 - 2x$. Démontrer que la fonction f est impaire.

$x \in [-2;2]$ et $-x \in [-2;2]$. $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -(x)^3 + 2x$
$= -(x^3 - 2x) = -f(x)$ donc f
est impaire.

Remarques : une fonction peut être ni paire ni impaire et seule la fonction nulle définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 est paire et impaire.

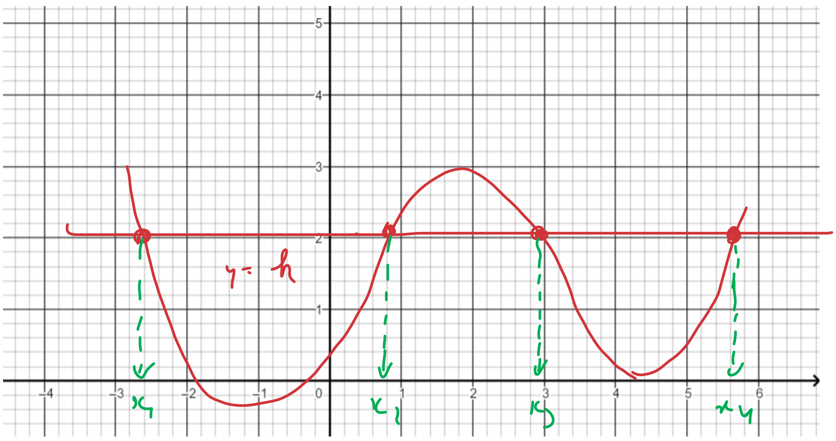
3. Résolutions graphiques d'équations et inéquations

Définition

Le plan étant rapporté à un repère, soit C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur un ensemble D.
Un point $M(x; y)$ est un point d'intersection de C_f et C_g s'il appartient ………………… à C_f et à C_g.

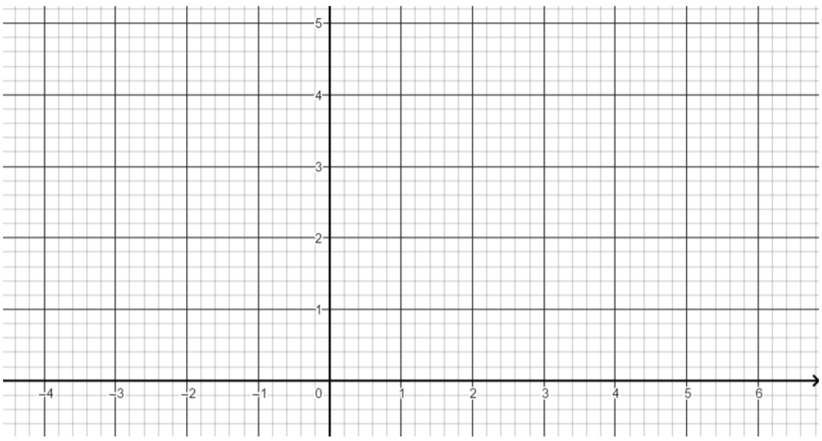
Théorème – Equations de la forme $f(x) = k$

Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur un ensemble D dans un repère donné. Pour tout réel k, les solutions dans D de l'équation $f(x) = k$ sont les …abscisses…… des …points… …d'intersection……… de C_f et de la …courbe…… horizontale d'équation $y = k$.



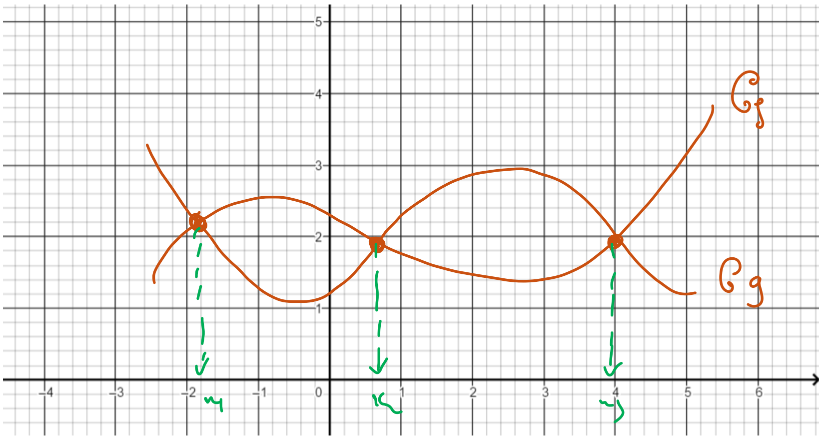
Théorème – Inéquations de la forme $f(x) < k$ (ou $\leq$ ou $>$ ou $\geq$)

Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur un ensemble D dans un repère donné. Pour tout réel k, les solutions dans D de l'équation $f(x) < k$ (respectivement : $f(x) > k$) sont les abscisses des points de C_f situés strictement au-dessous (respectivement : au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = k$.



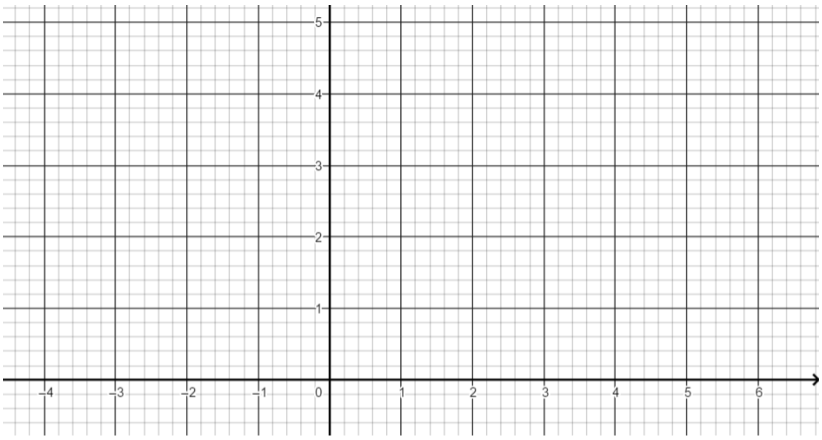
Théorème – Equations de la forme $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$

Soit C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur un ensemble D dans un repère donné. Pour tout réel k, les solutions dans D de l'équation $f(x) = g(x)$sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g.



Théorème – Inéquations de la forme $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ (ou ≤ ou > ou ≥)

Soit C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur un ensemble D dans un repère donné. Pour tout réel k, les solutions dans D de l'équation $f(x) < g(x)$ (respectivement : $f(x) > g(x)$) sont les abscisses des points de C_f situés strictement au-dessous (respectivement : au dessus)de C_g.



4. Variations d'une fonction

Définitions : sens de variation

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I. On dit que f est :

- croissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I vérifiant $a < b$, on a :
$$f(a) \leq f(b)$$
- strictement croissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I vérifiant $a < b$, on a :
$$f(a) < f(b)$$
- décroissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I vérifiant $a < b$, on a :
$$f(a) \geq f(b)$$
- strictement décroissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I vérifiant $a < b$, on a :
$$f(a) > f(b)$$
- constante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I vérifiant $a < b$, on a :
$$f(a) \leq f(b)$$

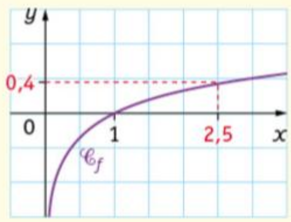
Définition

On dit que f est monotone sur un intervalle de I si f est uniquement croissante sur I ou si f est uniquement décroissante sur I.

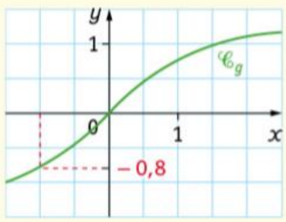
Déterminer par lecture graphique le sens de variation d'une fonction :

Pour chacune des courbes représentatives ci-dessous, conjecturer par lecture graphique son sens de variation sur l'intervalle donné.

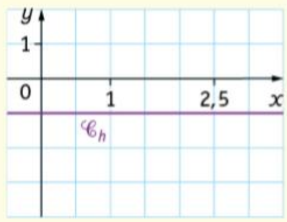
- **Variations de f sur $]0;2,5]$**



- **Variations de g sur $[-1;2]$**



- **Variations de h sur $[0;2,5]$**



➜ Que cherche-t-on ?
Conjecturer signifie « émettre une hypothèse ». Ici l'exercice consiste à indiquer quelles semblent être les variations de la fonction représentée graphiquement.

Tableau de variations : principe de construction, de lecture :

Sur la première ligne, l'ensemble de définition ou l'intervalle sur lequel on étudie f.

Sur la deuxième ligne, le sens de variations de f correspondant est indiqué avec la signalétique suivante :

↗	↘	→
signifie que la fonction est strictement croissante	signifie que la fonction est strictement décroissante	signifie que la fonction est constante

Exemple :

Que peut-on lire sur ce tableau de variation ?

- la fonction f est étudiée sur l'intervalle $[-2\,;4]$;
- f est strictement croissante sur $[-2\,;-1]$;
- f est constante sur $[1\,;3]$, elle prend la valeur 1 sur tout cet intervalle $[1\,;3]$;
- f est strictement décroissante sur $[3\,;4]$.

Bornes de l'intervalle sur lequel on étudie f

x	-2	1	3	4
$f(x)$	-3	↗ 1	→ 1	↘ 0

Déterminer le tableau de variation d'une fonction par lecture graphique

■ **Pour les fonctions f, g et h représentées ci-dessus, écrire son tableau de variations sur l'intervalle donné.**

➜ **Comment faire ?**

1. Sur la 1^re^ ligne, on écrit x puis l'intervalle étudié.
2. sur la 2^e^ ligne, on écrit $f(x)$ (si la fonction étudiée s'appelle f), puis son sens de variation.
3. On complète le tableau avec les valeurs de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle étudié.

Définitions : maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I et soit a un réel de l'intervalle I. On dit que :

- f admet un **maximum** en a sur I lorsque, pour tout $x \in I$ $f(x) \leq f(a)$
- f admet un **minimum** en a sur I lorsque, pour tout $x \in I$ $f(x) \geq f(a)$
- f admet un extremum en a sur I si f admet un minimum en a ou bien un maximum en a sur I.

Remarques :

- Si f admet un maximum (respectivement : minimum) en a, alors $f(a)$ est la plus grande (respectivement : petite) des images $f(x)$ sur I.
- La fonction f n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum sur I (exemple : lorsque l'une des bornes est ouverte).

Reconnaître les extremums d'une fonction

On donne le tableau de variation d'une fonction f.
Donner ses extremums dans chacun des cas demandés :

x	-5		0		2		4		6
f	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

a. sur $[2;6]$. **b.** sur $[0;2]$. **c.** sur $[-5;6]$.

Signe d'une fonction
Pour déterminer graphiquement le signe d'une fonction, on repère les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On regarde ensuite la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses . Si la courbe est au-dessus (respectivement : dessous), on notera un signe $+$, (respectivement : -) sur l'intervalle correspondant.

Repérer les principales caractéristiques d'une courbe
A partir du graphique, donner l'ensemble de définition, le tableau de signes, le tableau de variations et les extremums de f.