Fonctions de référence

①

En se servant éventuellement des courbes représentatives des fonctions de référence, résoudre les équations et inéquations suivantes.

Ⓐ **1.** $x^2=81$ **2.** $x^2\leqslant 7$ **3.** $x^2<4$ **4.** $x^2=0$ **5.** $x^2>-1$

Ⓑ **1.** $\sqrt{x}\leqslant 3$ **2.** $x^3=2\sqrt{2}$ **3.** $x^3<-8$ **4.** $\sqrt{x}=-1$ **5.** $\sqrt{x}<\pi$

Ⓒ **1.** $\frac{1}{x}=\frac{1}{7}$ **2.** $\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$ **3.** $\frac{1}{x}\leqslant-\frac{1}{8}$ **4.** $\frac{1}{x}\leqslant 12$ **5.** $\frac{3}{x}\leqslant 6$

②

x est un nombre réel tel que $-2\leqslant x\leqslant 3$.
À l'aide des variations de la fonction carré, on souhaite déterminer un encadrement pour x^2.

Ⓐ Première méthode : sans tableau de variations.

1. On suppose que $x\leqslant 0$. Montrer que l'on a $0\leqslant x^2\leqslant 4$.

2. On suppose que $x\geqslant 0$. Montrer que l'on a $0\leqslant x^2\leqslant 9$.

3. En déduire alors que $0\leqslant x^2\leqslant 9$.

Ⓑ Seconde méthode : avec tableau de variations.

1. Déterminer le tableau de variations de la fonction carré sur $[-2\,;3]$.

2. En déduire un encadrement pour x^2 lorsque $-2\leqslant x\leqslant 3$.

③ En utilisant une méthode au choix, donner un encadrement de x^2 sachant que :

1. $3\leqslant x\leqslant 5$ **2.** $-4\leqslant x\leqslant 2$

④ x est un nombre réel.

1. Si $3<x\leqslant 7$, déterminer un encadrement de :

a. x^2 **b.** $8x^2$ **c.** x^2+3

2. Si $-4\leqslant x<-1$, déterminer un encadrement de :

a. x^2 **b.** $3x^2+4$ **c.** $-x^2+3$

⑤ Dans chaque cas, donner un encadrement de $\sqrt{x}$.

1. $1<x<2$ **3.** $5\leqslant 4x<16$

2. $4\leqslant x<12$ **4.** $1{,}44<x\leqslant \pi^2+2\pi+1$

⑥ Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **3.** $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$ **5.** $\dfrac{2-3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

2. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **4.** $\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{\pi+1}}$ **6.** $\dfrac{1+5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

⑦ Ranger les nombres suivants par ordre croissant.

$\sqrt{3}\,;\sqrt{\frac{5}{3}}\,;\sqrt{\pi}\,;\sqrt{3{,}8}\,;\sqrt{0{,}1287}$

⑧ Donner l'inverse des nombres suivants.

1. $\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{3}$ **3.** $\dfrac{-1}{2}\times\dfrac{1}{3}$ **5.** $\dfrac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{3}}$

2. $\dfrac{-1}{2}-\dfrac{1}{3}$ **4.** $\dfrac{-1}{2}\times\dfrac{-1}{3}$ **6.** $\dfrac{\frac{-1}{2}}{\frac{-1}{3}}$

⑨ Ordonner les inverses $\frac{1}{x}$ des nombres x suivants en justifiant votre réponse.

$-0{,}3\,;1\,;\frac{4}{7}\,;-1\,;\frac{4}{9}\,;-1{,}04\,;\frac{4}{7}\,;-0{,}03\,;\frac{5}{4}\,;-1{,}4\,;\frac{11}{4}$

⑩ Déterminer un encadrement pour $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants.

1. $1\leqslant x\leqslant 3$ **3.** $-5<x<-1$ **5.** $-1+\frac{\pi}{4}<x\leqslant-\frac{1}{16}$

2. $\frac{1}{2}<x\leqslant 6$ **4.** $\frac{2\pi}{3}\leqslant x<12$ **6.** $-\frac{5}{\pi+2}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{\pi+6}$

⑪ Déterminer le ou les intervalles pouvant contenir l'inverse de x dans la liste suivante.

1. Si $3<x<4$ alors son inverse appartient à :

a. $]-\infty\,;0[$ **c.** $\left]\frac{1}{4}\,;\frac{1}{3}\right[$ **e.** $]-4\,;-3[$

b. $]0\,;+\infty[$ **d.** $\left]-\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{3}\right[$ **f.** $]-4\,;3]$

2. Si $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{5}$ alors son inverse appartient à :

a. $]-5\,;-2[$ **c.** $]-\infty\,;0]$ **e.** $[-0{,}5\,;-0{,}2]$

b. $]2\,;5[$ **d.** $]0\,;+\infty[$ **f.** $\left]-5\,;\frac{1}{2}\right]$

3. Si $-1\geqslant x\geqslant-10$ alors son inverse appartient à :

a. $]-\infty\,;-1[$ **c.** $[-1\,;-0{,}1]$ **e.** $]-10\,;-1[$

b. $]-10\,;+\infty[$ **d.** $[-1\,;-0{,}1[$ **f.** $]-1\,;10]$

4. Si $\frac{3}{2}>x\geqslant\frac{2}{3}$ alors son inverse appartient à :

a. $]-2\,;3[$ **c.** $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right]$ **e.** $]0\,;1]$

b. $\left]\frac{2}{3}\,;1{,}5\right]$ **d.** $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ **f.** $\left[-\frac{3}{2}\,;-\frac{2}{3}\right[$

(12) **Avec la position relative des courbes.**

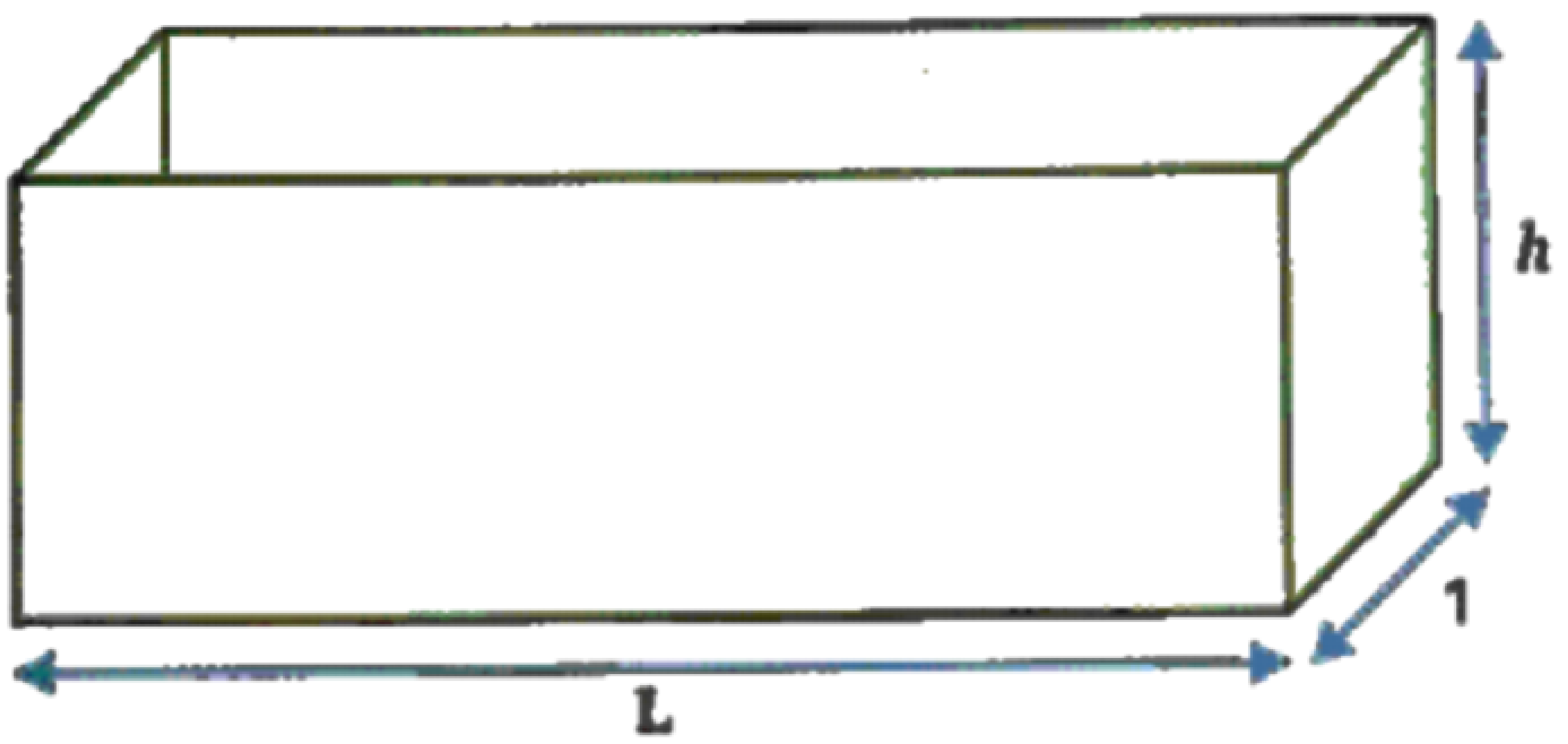
(A)

1. $0{,}604^2 \ldots 0{,}604^3$
2. $\left(\frac{7}{8}\right)^2 \ldots \frac{7}{8}$
3. $1{,}79^3 \ldots 1{,}79^2$
4. $\frac{13}{12}^{2} \ldots \left(\frac{1}{12}\right)$
5. $\pi - 3 \ldots (\pi - 3)^3$
6. $(\sqrt{2})^3 \ldots (\sqrt{2})^2$

(B) Ranger les nombres suivants par ordre croissant.

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 ; \left(\frac{2}{3}\right)^3 ; \frac{2}{3}$
2. $\left(\frac{32}{31}\right)^3 ; \frac{32}{31} ; \left(\frac{32}{31}\right)^2$
3. $\sqrt{0{,}5}^3 ; \sqrt{0{,}5} ; 0{,}5$
4. $\sqrt{\pi - 1} ; \pi - 1 ; (\sqrt{\pi - 1})^3$

(13) **Pour son chaton, Virgile désire construire un enclos provisoire ayant la forme d'un pavé droit sans fond ni toit.**
La longueur de l'enclos est $\ell = 1$ m, la largeur est notée L et la hauteur h.
Il possède 5 m² de contreplaqué et désire utiliser la totalité.



1. a. Donner l'expression de la surface S de l'enclos en fonction de L et h.

AIDE

Ne pas oublier que l'enclos n'a pas de fond ni de toit.

b. Montrer que $0 < h < 2{,}5$ et que $L = \frac{5}{2h} - 1$.

2. Sachant que Virgile veut un enclos avec une hauteur comprise entre 0,5 m et 1 m, déterminer un encadrement de L.

3. Écrire h en fonction de L puis déterminer une expression du volume de l'enclos en fonction de L.

4. Sachant que Virgile veut un enclos avec un volume compris entre 1 m³ et 1,5 m³, déterminer un nouvel encadrement de L.

5. Est-il possible d'appliquer les deux contraintes ?

(14) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

1. Déterminer une expression simplifiée en fonction de x de :

a. $f(x-1)$ **b.** $f(x+1)$ **c.** $f(x+2)$

2. Étudier le signe de $f(x+1) - f(x)$ en fonction de x.

(15) f et g sont définies sur $\mathbb{N}$ par $f(n) = 2^n$ et $g(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Déterminer une expression simplifiée, en fonction de n, de $f(n+1) - f(n)$ puis de $g(n+1) - g(n)$.

(16) Étudier la parité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = -5x^2 + 6$
2. $g(x) = 2x^3 - 5x^2$
3. $h(x) = \frac{-4x}{x^2+1}$

(17) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, on a : $x \geqslant \sqrt{2x-1}$.

(18) On considère un réel x tel que $-3 \leqslant x < 4$.

Déterminer un encadrement de :

1. $(x+3)^2 + 2$
2. $1 - 3x^2$
3. $7x^3 - 2$
4. $\sqrt{x+3} - 2$
5. $6 - 3(x-1)^2$

(19) Étudier le signe des fonctions définies sur $\mathcal{D}$

1. $f(x) = 5x^3$ avec $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = -5(x-3)(x+2)$ avec $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \frac{2x-3}{10-5x}$ avec $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$
4. $\ell(x) = (5-2x) - (6x+2)$ avec $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
5. $p(x) = -\sqrt{2x+6}$ avec $\mathcal{D} = [-3 ; +\infty[$.

(20) **1.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

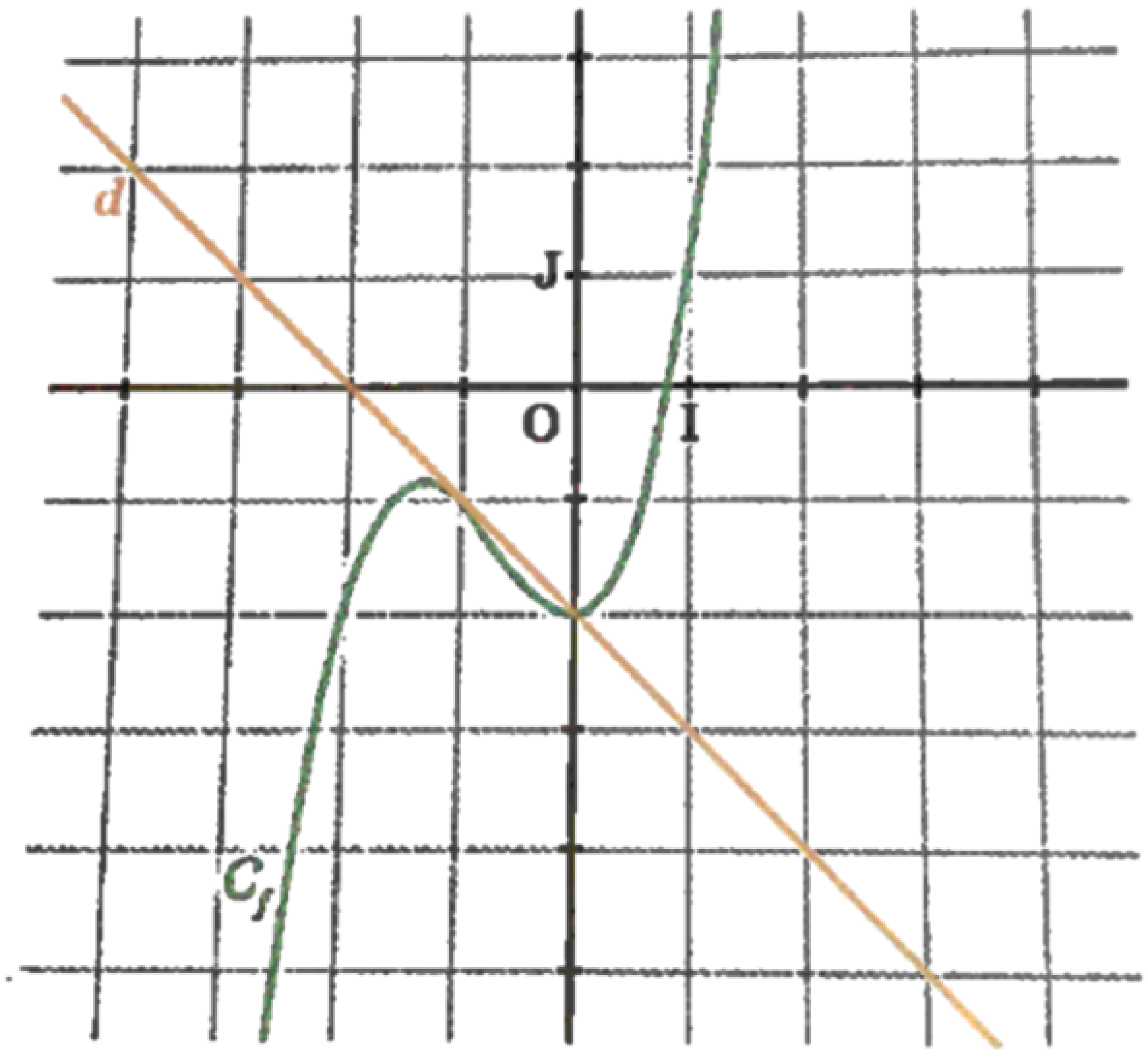
a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 - 9$.

b. En déduire la forme factorisée de f.

2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3(x-1)^2 - 12$. Déterminer la forme développée puis la forme factorisée de g.

3. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{5}(x-3)^2 - 5$. Déterminer la forme développée puis la forme factorisée de h.

21 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+2x^2-7$. On note C_f sa représentation graphique dans un repère $(O\,;I\,,J)$.



1. À l'aide du graphique, déterminer l'équation réduite de la droite d.

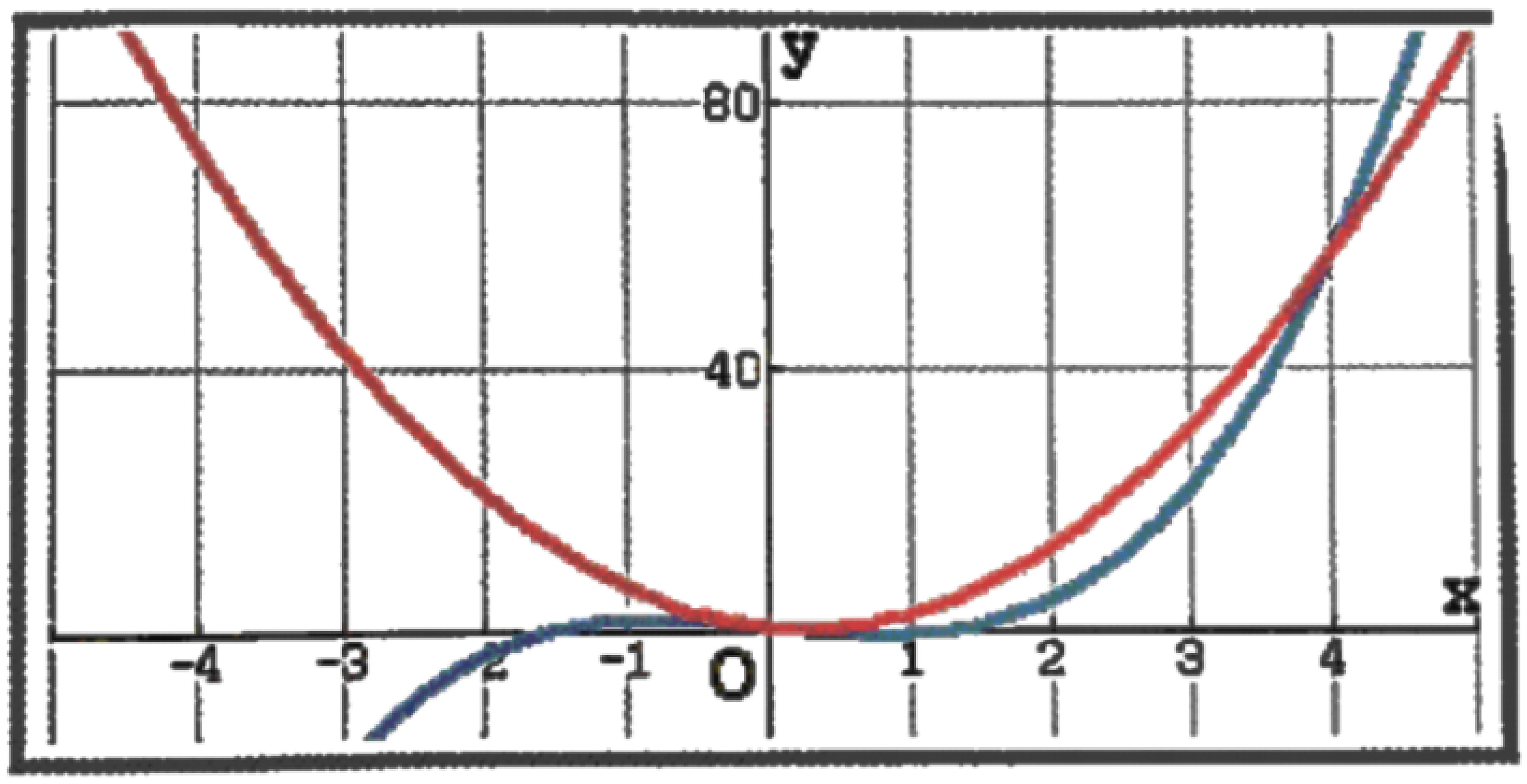
2. a. Conjecturer la position relative de C_f et d en fonction des valeurs de x.

b. Démontrer ces conjectures.

22 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x+1$ et $g(x)=4x^2-2x+1$.

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère du plan.

1. À l'aide d'une calculatrice, on obtient l'affichage suivant.



a. Conjecturer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

b. Conjecturer la position relative des courbes C_f et C_g.

2. Démontrer les conjectures émises.

23 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2(x-3)^2-18$.

C_f est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan.

1. Déterminer la forme développée puis factorisée de f.

2. Étudier la position relative C_f par rapport à l'axe des abscisses.

3. a. Calculer $f(0)$.

b. d est la droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées $A\left(\frac{1}{2}\,;-6\right)$. Déterminer son équation réduite.

c. Étudier la position relative de C_f et d.

AIDE

Pour étudier la position relative de deux courbes, il faut déterminer une inéquation à résoudre.

24 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-3(x-1)^2+27$.

C_f est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la forme développée puis factorisée de f.

2. À l'aide d'une calculatrice :

a. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.

b. Déterminer l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4. d est la droite d'équation $y=6x+24$.

Étudier la position relative de C_f et d.

25 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

1. En posant $y=0$, justifier que $f(0)=1$.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f(2x)=[f(x)]^2$.

3. Démontrer que, pour tout réel x, on a $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

4. Démontrer que, pour tous réels x et y, on a $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$.

En classe de première, on démontre qu'il existe une fonction vérifiant ces conditions : la **fonction exponentielle.**

25 Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les trois points $A\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};2\right)$ et $C\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

a. Montrer que ces trois points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+2$.

b. Sur l'écran de la calculatrice, afficher la courbe $\mathscr{C}$.

c. Sur le même écran, afficher la courbe $\mathscr{H}$ représentant la fonction h définie sur $[-3;0[\cup]0;3]$ par $h(x)=\frac{1}{x}$.

d. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$.

32 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient f et g les fonctions définies sur $[-3;3]$ par $f(x)=(x-2)^3$ et $g(x)=4-x^2$.

a. À l'aide de la calculatrice, représenter les courbes représentatives des fonctions f et g.

b. Quelle est l'inégalité entre $f(x)$ et $g(x)$ sur l'intervalle $[0;2]$.

c. Y a-t-il un point à coordonnées entières strictement positives entre les deux courbes représentatives des fonctions f et g ?

26 **1.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+4x^2-3x-2$.

a. Vérifier que $f(1)=0$. On dit que 1 est une racine évidente de f, c'est-à-dire une solution simple de l'équation $f(x)=0$.

b. On considère trois réels a, b et c. Justifier que $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

c. Pour déterminer a, b et c tels que $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$, on procède à une identification des coefficients en écrivant le système suivant :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=4 \\ c-b=-3 \\ -c=-2 \end{cases}$$

Résoudre ce système puis en déduire une forme factorisée de f.

2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-x^3+2x^2+x-2$. En utilisant la méthode précédente, déterminer les réels a, b, c et d tels que $g(x)=(x-d)(ax^2+bx+c)$.

29 À l'aide de la calculatrice, construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2-4$.

a. Déterminer graphiquement sur $\mathbb{R}$ les solutions de la double inéquation $-3\leqslant f(x)\leqslant 0$.

b. Retrouver par le calcul les solutions précédentes.

27 **a.** À l'aide de la calculatrice, construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par $f(x)=(x-1)^2$.

b. Dans le même repère, construire la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

c. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.

d. Montrer que pour tout réel x,

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$$

e. En déduire, grâce à un tableau de signes, les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.

28 **a.** À l'aide de la calculatrice, construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=-x^2-2x+3$, et de la fonction g définie sur $[-3;3]$ par $g(x)=x^2-2x+1$.

b. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)>g(x)$.

c. Par le calcul, déterminer les coordonnées des points d'intersection des représentations graphiques des fonctions f et g.

d. Par le calcul, retrouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x)>g(x)$. En déduire la position relative sur $\mathbb{R}$ des courbes représentatives des fonctions f et g.

30 **a.** À l'aide de la calculatrice, construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2$.

b. Tracer dans le même repère les représentations graphiques des fonctions g et k définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1$ et $k(x)=\frac{9}{2}$.

c. Déterminer graphiquement les valeurs approchées des solutions des équations $f(x)=g(x)$ et $f(x)=k(x)$.

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2$.

e. Retrouver par le calcul les valeurs exactes des solutions des équations $f(x)=g(x)$ et $f(x)=k(x)$.

f. Déterminer dans $\mathbb{R}$ les solutions de la double inéquation $g(x)\leqslant f(x)\leqslant k(x)$.

31 Soient a, b, c et d quatre nombres réels. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Comment faut-il choisir les réels a, b, c et d pour que :

a. la fonction f soit paire ?

b. la fonction f soit impaire ?