Exercices second degré

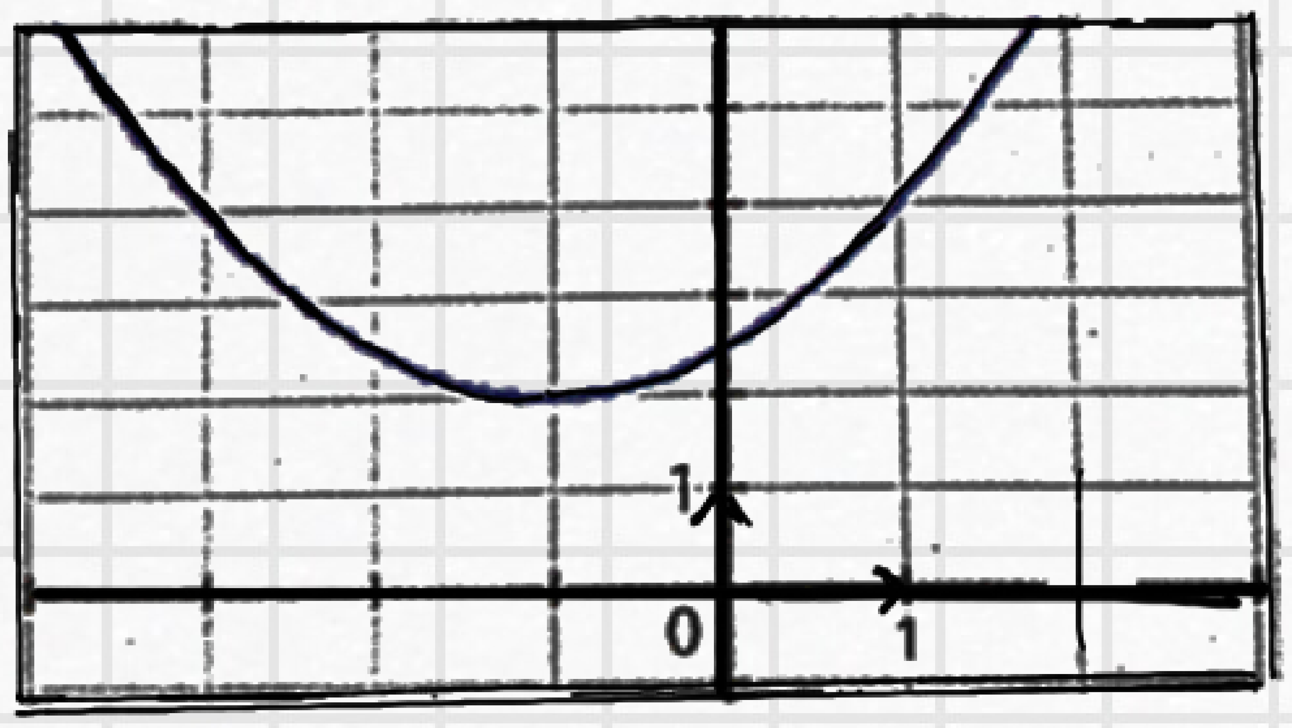
1 Quel est le terme constant et le coefficient des x^2 obtenus en développant ? :

a. $(2x+1)(x-3)$ **b.** $2(x+3)(x-8)$ **c.** $3(x-5)^2-12$

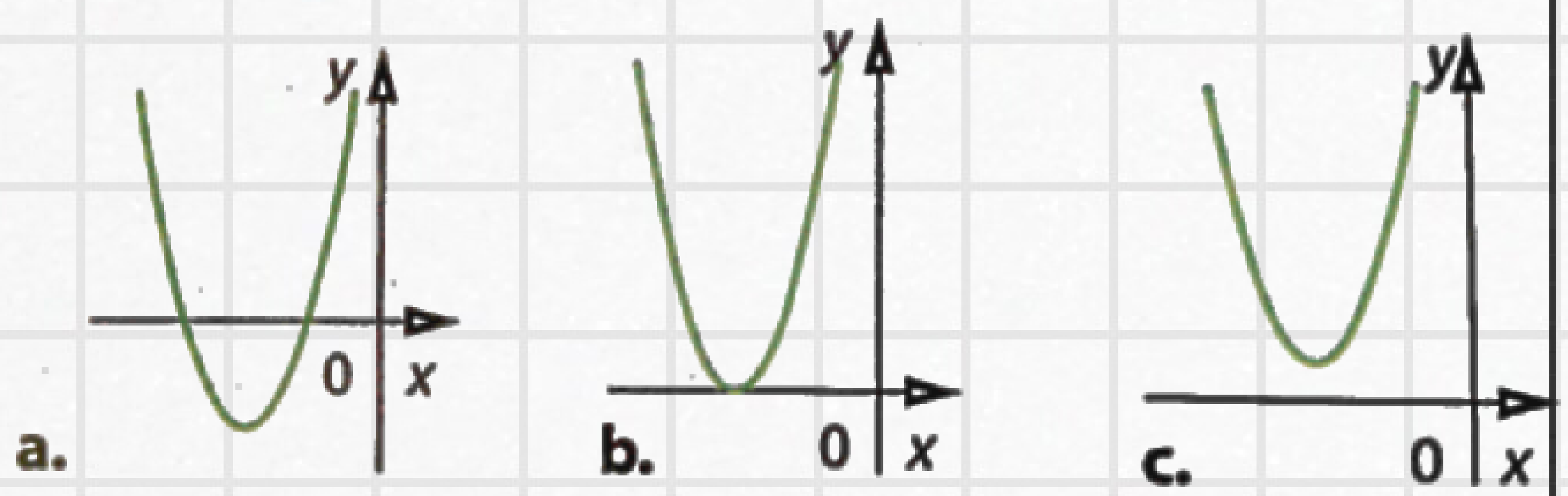
2 Quelle est la forme canonique de la fonction f représentée par cette parabole ?

a. $\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ **b.** $\frac{1}{2}(x-2)^2-1$

c. $\frac{1}{2}(x+2)^2-1$ **d.** autre



3 Quel graphique peut correspondre à la parabole d'équation $y=\frac{1}{4}x^2+7x+39$?



4

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	...	↗

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$h(x)$	↗	...	↘

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$g(x)$	↘	...	↗

Retrouver, parmi les expressions suivantes, une expression possible de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$. Justifier.

a. $5(x-1)(x-5)$ **b.** $-x^2+6x-1$

c. $(7-x)(3-x)$ **d.** $-(x+1)^2+3$

5 Déterminer les coordonnées du sommet et l'axe de symétrie de la parabole et en donner une allure :

a) $y=3(x-2)^2+1$ **b.** $y=-2x^2+6x-4$ **c.** $y=(-2x+1)(-8x-4)$

6 Soit $f(x)=-2x^2+6x-3$ pour tout x réel.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Calculer $f(2)$.

3. En déduire les solutions de l'équation $f(x)=1$.

4. Tracer la parabole représentant f.

5. Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 1$.

7 Mettre sous forme canonique :

a. x^2+4x+5 **b.** $3t^2+6t-9$

c. $9a^2+18a+1$ **d.** $2x^2+x+1$

8 Soit $f(x)=-2x^2+6x-1$ pour tout x réel.

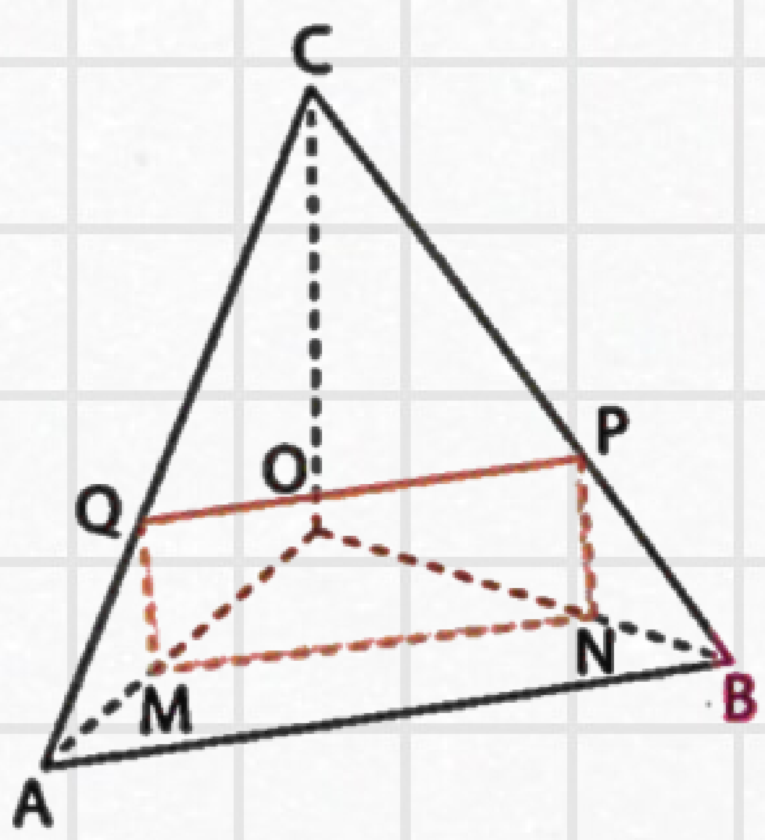
1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

3. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

10 OABC est un tétraèdre tel que OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles isocèles en O.

On prendra OA = 4 cm.
Pour tout réel x de $[0\,;4]$, on place le point M sur [OA] tel que $OM=x$.
La parallèle à (AB) passant par M coupe [OB] en N ; les parallèles à (OC) passant par M et N coupent [CA] et [CB] respectivement en Q et P.



1. a. Faire une figure dans le plan (OAB) puis déterminer MN en fonction de x.

b. Déterminer de même MQ en fonction de x.

2. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle MNPQ en fonction de x.

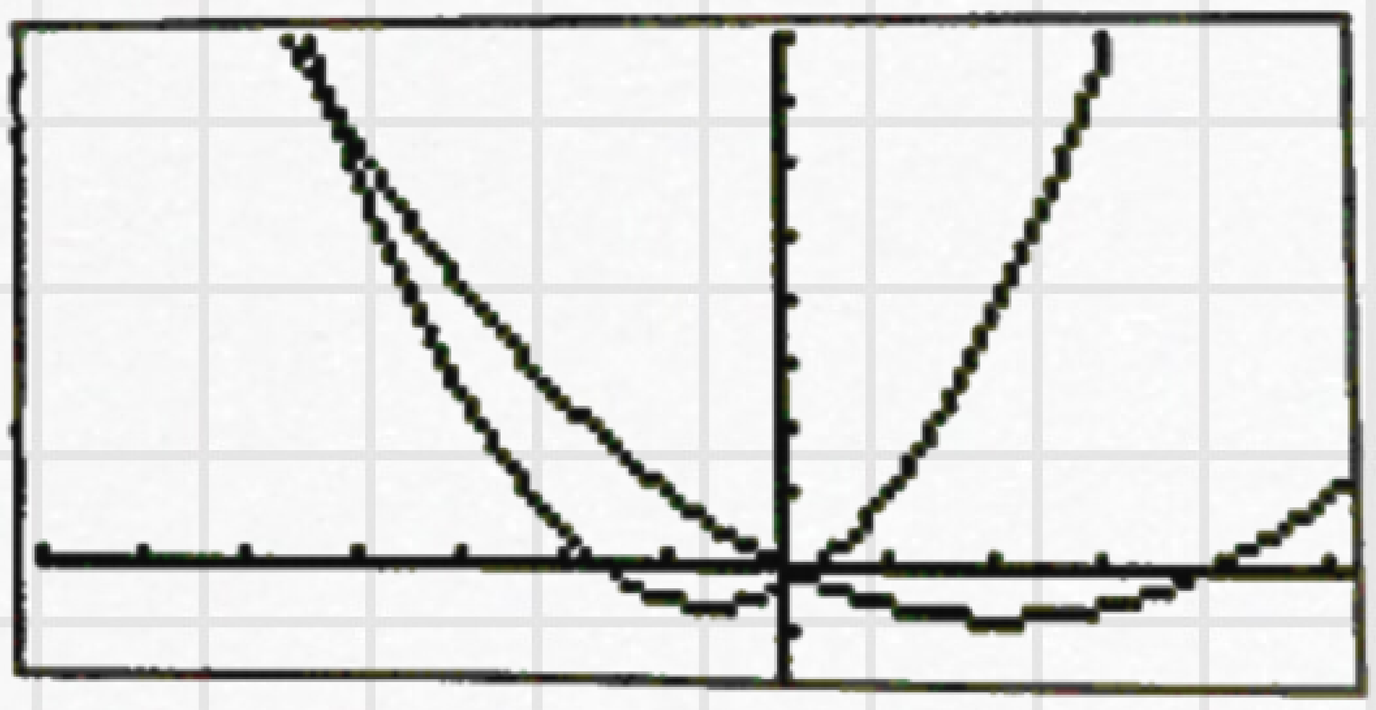
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ et déterminer où placer M pour que cette aire soit maximale.

11 Calculer Δ et résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2-12x+18=0$ b) $x^2-x+6=0$

c) $\frac{1}{3}x^2+x-6=0$

12 Les courbes $\mathcal{P} : y = x^2 - 4x$ et $\mathcal{P}' : y = 3x^2 + 4x - 2$ sont représentées ci-dessous.



1. Déterminer par lecture graphique les éventuelles solutions de l'équation $x^2 - 4x = 3x^2 + 4x - 2$.

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

13 Résoudre les équations :

a. $x^2 + 5x + 3 = 2x + 3$

b. $(2t+1)(t-4) = t^2 - 4t - 6$

c. $(t+2)^2 = 2t^2 + 5t - 2$

d. $(x+1)(x+2) = (x+3)(x+4) + (x+5)(x+6)$

14 ABCD est un carré de côté 6.
Le point M appartient à [AB].
Le point M′ de [AD] est tel que AM′ = AM.
On note x la longueur AM exprimée en cm et $A(x)$ l'aire de CMM′ exprimée en cm².

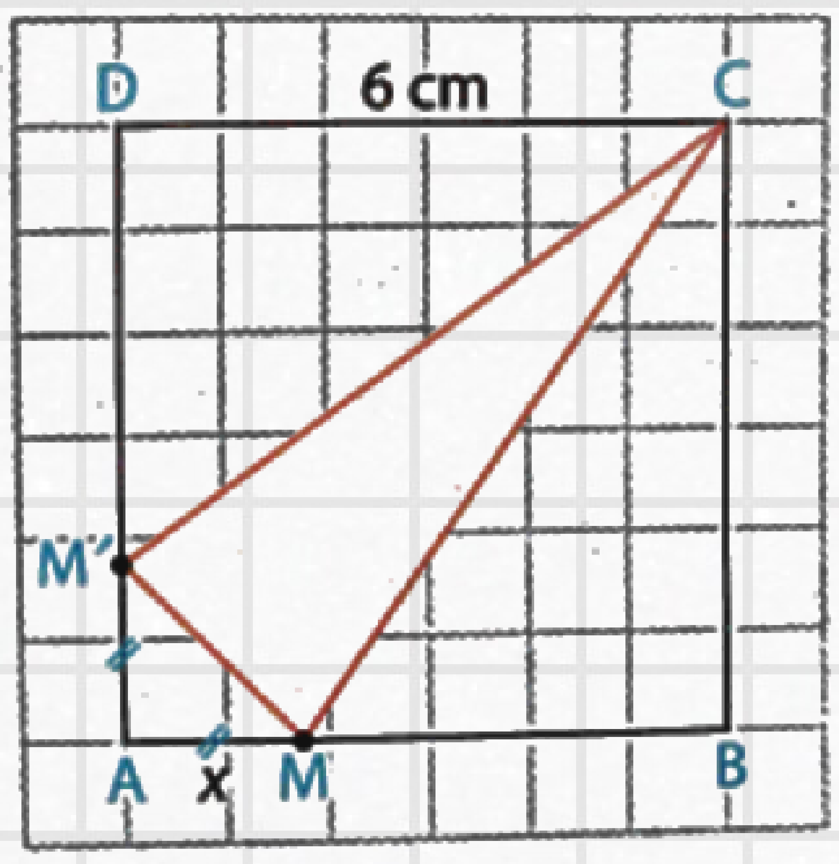
1. À quel intervalle appartient x ?

2. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction A.

4. Résoudre $A(x) = 9$.

5. Pour quelles valeurs de x, l'aire du triangle CMM′ est-elle supérieure au quart de celle du carré ?



15 Factoriser si possible les trinômes suivants en un produit de deux polynômes de degré 1.

a) $3x^2 - 6x - 9$

b) $-x^2 - 12x + 28$

c) $-x^2 + 5x - 10$

d) $3x^2 + \sqrt{2}x + 6$

16 **1.** Dresser les tableaux de signes de :

a. $2x^2 - 5x + 7$

b. $-x^2 + 6x + 9$

c. $-4x^2 - 11x + 3$

d. $4x^2 - 8$

2. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

17 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$

b) $x^2 + 3x - 5 < x + 4$

c) $2(x+1)^2 - 3x > 2$

d) $3x + \frac{1}{2x} \leqslant \frac{5}{2}$

18 **Position relative de courbes**

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 3x.$$

1. Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

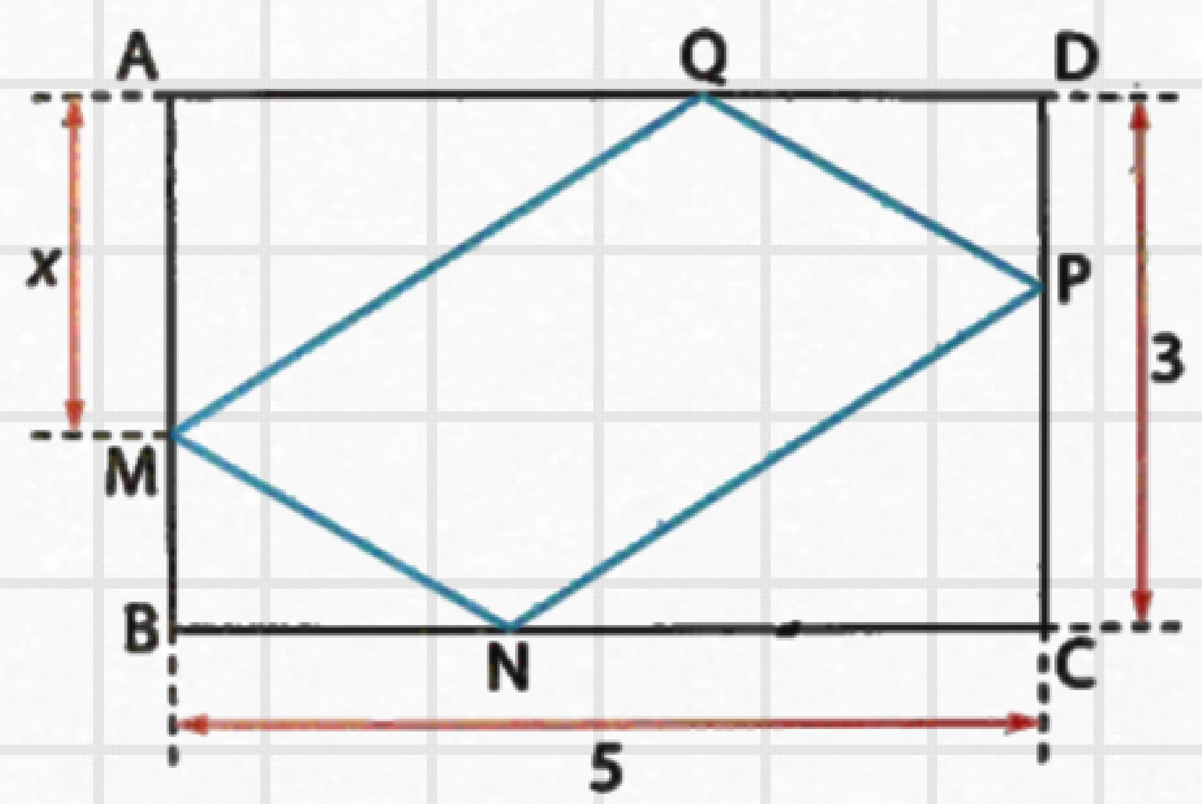
2. que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

19 Résoudre les inéquations :

a. $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 2) < 0$

b. $\dfrac{-2x^2 - 3x + 20}{x - 1} \geqslant 0$

20 ABCD est un rectangle tel que AB = 3 cm et BC = 5 cm.
Les points M, N, P, Q appartiennent aux côtés du rectangle et AM = BN = CP = DQ.
On note x la longueur AM (en cm) et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de MNPQ (en cm²).



1. Préciser l'ensemble de définition de $\mathcal{A}$.

2. Démontrer que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + .5$.

3. Peut-on placer M de telle sorte que

a. MNPQ ait pour aire 9 cm² ?

b. MNPQ ait une aire inférieure à 9 cm² ?

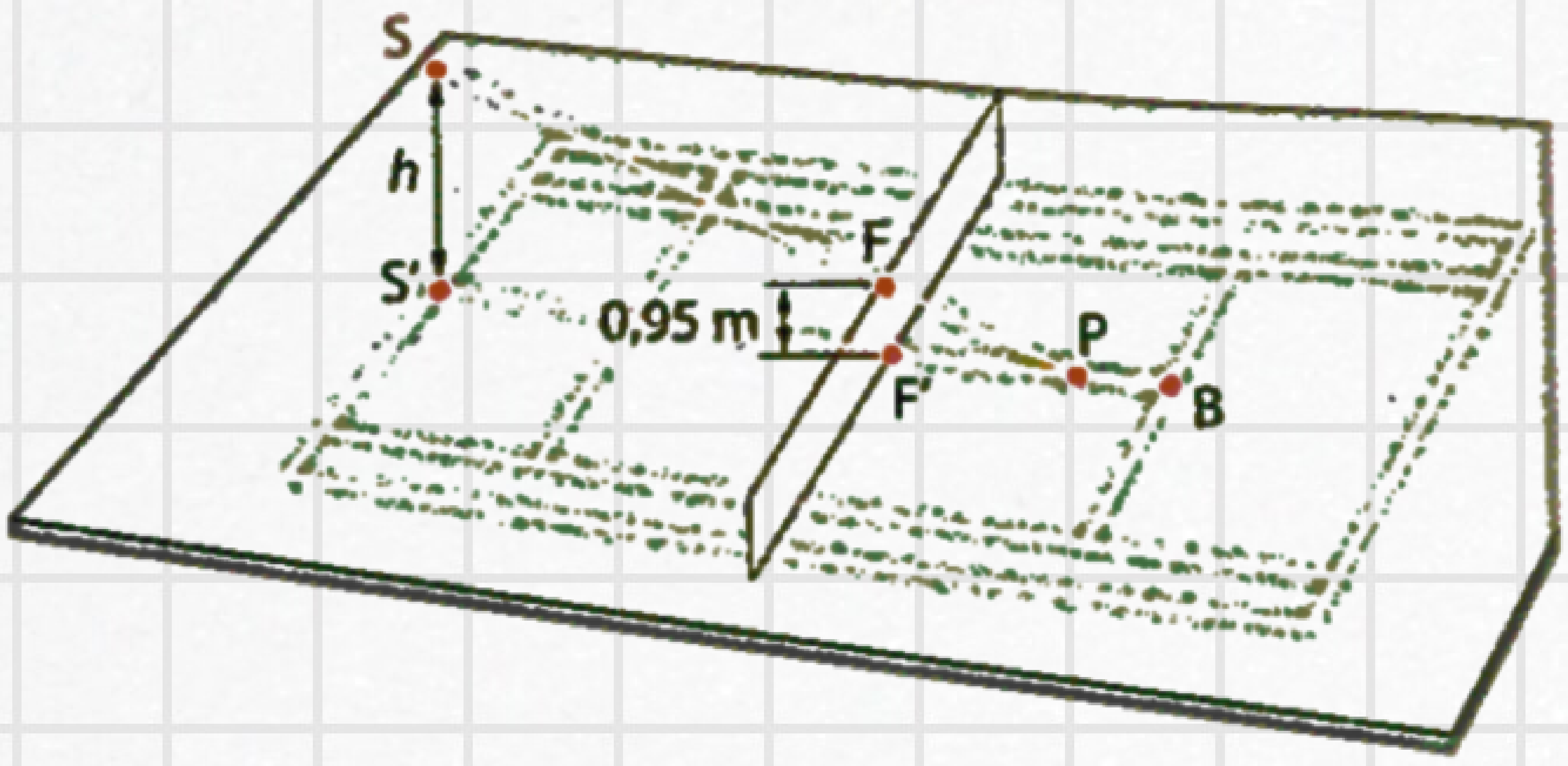
4. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$.

5. Quelle est l'aire maximale de MNPQ ?
Et son aire minimale ?

21

Le service au tennis

On modélise de façon simplifiée un service effectué par une joueuse située en S′, qui frappe la balle en S, perpendiculairement au filet.
La longueur du rectangle de service est F′B = 6,4 m, et S′F′ = 11,885 m.



Dans un repère d'origine S′, d'axe des abscisses (S′F′), d'axe des ordonnées (S′S) et d'unité 1 m, la trajectoire de la balle est une partie d'une parabole $\mathcal{P}$.
La joueuse frappe la balle avec une vitesse de 163 km·h^{-1} à une hauteur $h = 2{,}67$ m avec un angle α par rapport à l'horizontale.
Dans chacun des deux cas suivants, la balle passe-t-elle au-dessus du filet ?
Si oui, arrive-t-elle dans le rectangle de service ?

a. Si $\alpha = 5°$, $\mathcal{P} : y = 2{,}67 - 0{,}087x - 0{,}0024x^2$.

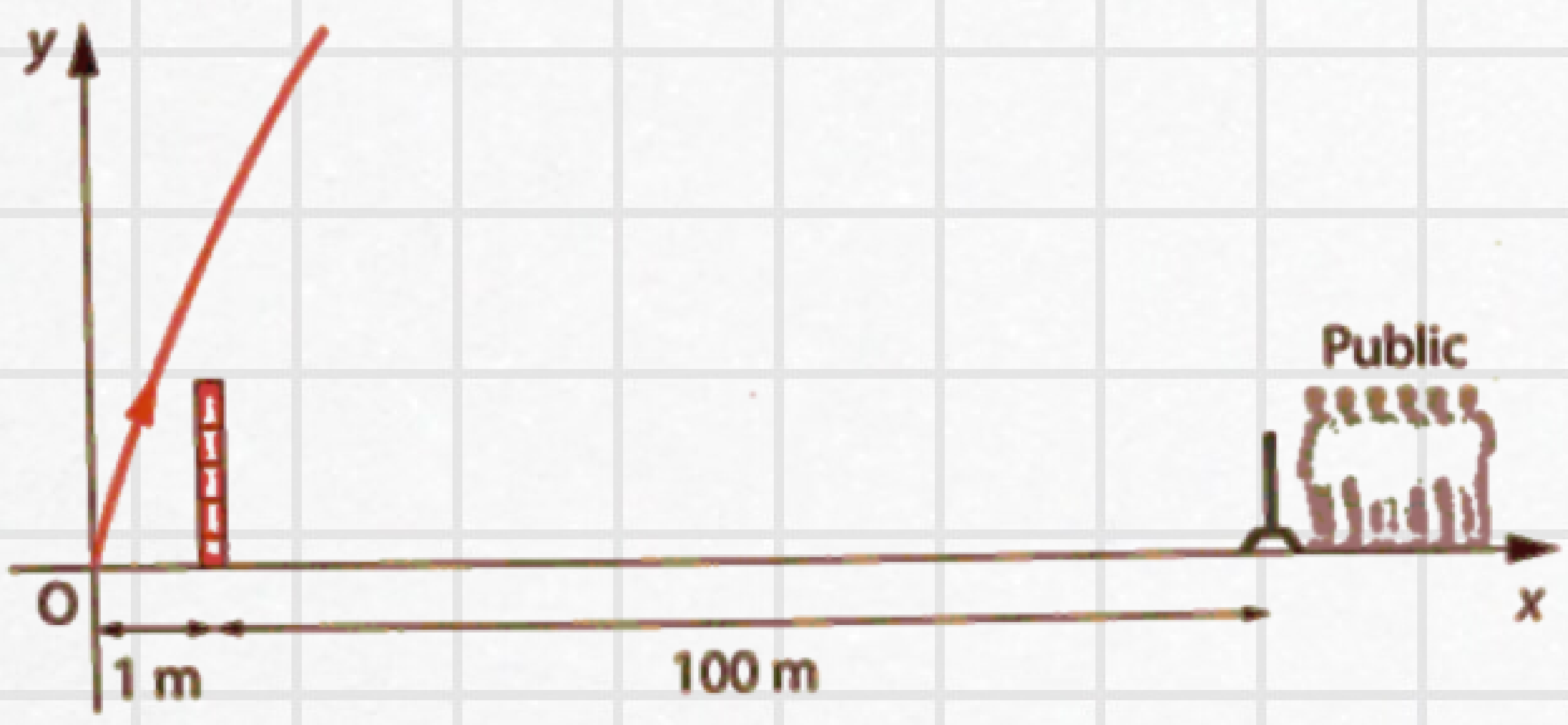
b. Si $\alpha = 6{,}5°$, $\mathcal{P} : y = 2{,}67 - 0{,}114x - 0{,}0024x^2$.

Source : *Tangente* HS n° 19.

22

Le feu d'artifice

Les artificiers sont cachés du public par un mur de hauteur 2 m, placé à 1 m du point de lancement des fusées du feu d'artifice. Le public est à 100 m du mur, derrière des barrières de sécurité.



La trajectoire est un morceau de la parabole d'équation $y = -\frac{50}{v_0^2}x^2 + 3x$ où v_0 est la vitesse de lancement en m·s^{-1}.
Les longueurs sont en mètres.
La fusée doit passer au-dessus du mur et retomber, en cas de non-explosion en l'air, avant les barrières de sécurité.

1. La vitesse initiale v_0 peut-elle être égale à :

a. 5 m·s^{-1} **b.** 50 m·s^{-1} **c.** 25 m·s^{-1} ?

2. Quelles sont les vitesses initiales possibles ?

23

Équations bicarrées

On pose $X = x^2$. Exprimer x^4 en fonction de X puis résoudre les équations suivantes :

a. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ **b.** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

24

Paraboles en familles

Pour tout réel m, on considère la parabole notée P_m d'équation $y = 2x^2 - 6mx + 12m$. Démontrer qu'il existe un point A commun à toutes les paraboles.

25

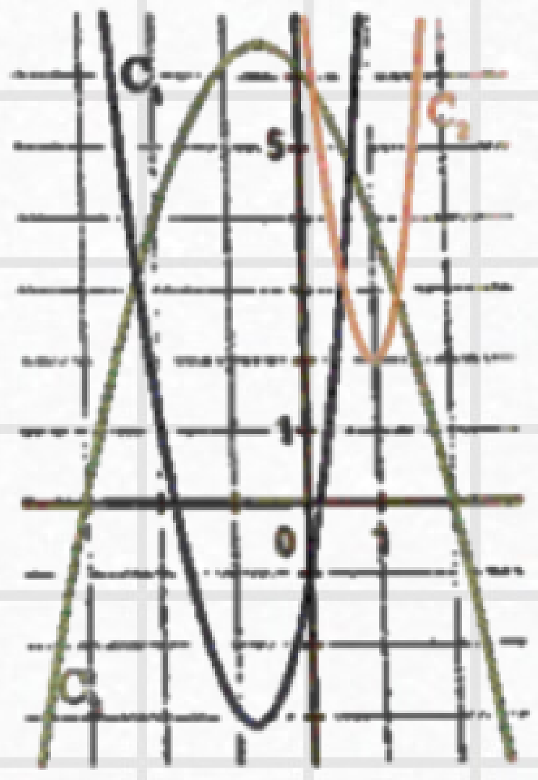
Faisceau de droites

Dans le repère (O, I, J) orthogonal, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 + 3x + 11$ et le point R(0 ; 2).
Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles la droite de coefficient directeur m passant par le point R coupe la parabole ?

27. f, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -(x-2)(x+3)$,
$g(x) = 3x^2 + 5x - 1$ et
$h(x) = 7(x-1)^2 + 2$.

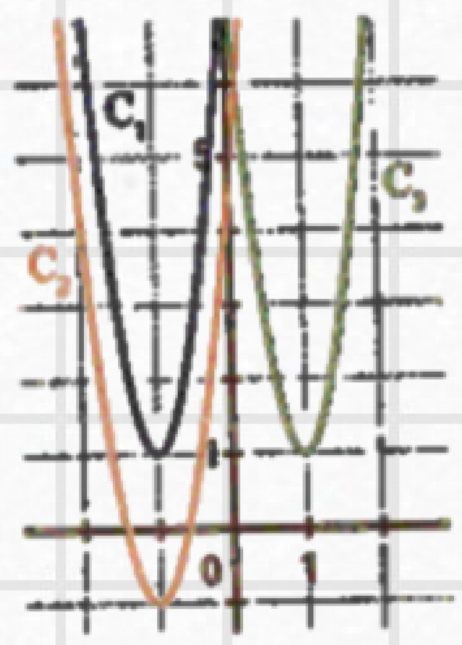
1. Associer chaque courbe à sa fonction associée en expliquant la démarche.

2. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection entre C_2 et l'axe des ordonnées.



28 Voici trois fonctions polynômes du second degré.
$f(x) = 6(x-1)^2 + 1$
$g(x) = 6(x+1)^2 + 1$
$h(x) = 6(x+1)^2 - 1$

Associer chaque courbe à sa fonction associée.



29 Compléter les égalités suivantes, où $x \in \mathbb{R}$.

1. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + \ldots$
2. $x^2 + 2x + \ldots = (x+1)^2$
3. $x^2 + 6x = (x + \ldots)^2 - \ldots$
4. $x^2 - 4x = (x \ldots \ldots)^2 - \ldots$

30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x-4)^2 = 144$
2. $(x+2)^2 + 5 = 6$
3. $3(x+1)^2 - 7 = 5$
4. $-5(x+1)^2 - 10 = 0$

31 Pour chaque fonction polynôme du second degré suivante, dresser son tableau de variations.

1. $f(x) = 2 - (x+7)^2$
2. $f(x) = -2x^2 + \frac{2}{5}$

32 Pour chaque fonction polynôme du second degré suivante, dresser son tableau de signes.

1. $g(x) = (x-7)(x+3)$
2. $h(x) = 5(x-9)(x-1)$
3. $k(x) = -3(x+1)(x-2)$
4. $\ell(x) = (6-4x)(5x+1)$

81 [Chercher.]

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=5(x-2)(x+5)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de :

a. $f(x)=0$ b. $f(x)\leqslant 0$ c. $f(x)>0$

82 [Chercher.]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $5(x+2)(x-6)<0$ 2. $-(x-5)(x+11)\geqslant 0$

83 [Chercher.]

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=6(x-3)(x+4)$.

C_f est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan.

1. Déterminer les antécédents de 0 par f.
2. Déterminer l'ensemble des abscisses des points de C_f situés au-dessus de l'axe des abscisses.

95 [Chercher.]

On considère la fonction trinôme du second degré f telle que :

- $f(0)=3$ et $f(1)=-1$;
- le produit de ses racines est égal à $\frac{3}{2}$.

Déterminer l'expression de $f(x)$.

96 [Chercher.]

On considère une fonction trinôme du second degré f telle que :

- $f(0)=2$ et $f(1)=1$;
- la somme de ses racines est égale à -3.

Déterminer l'expression de $f(x)$.

85 [Raisonner.]

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=-2x^2+5x+2$.

1. a. Tracer, à l'aide d'une calculatrice, les courbes représentatives des fonctions f et g, notées respectivement C_f et C_g.

b. Conjecturer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

c. Conjecturer la position relative des courbes C_f et C_g.

2. Justifier que pour tout réel x, on a :
$f(x)-g(x)=(3x+1)(x-2)$.
3. Démontrer les conjectures émises.

86 [Raisonner.] DÉMO

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=3(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)$.

C_f est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :

a. $f(x)=3x^2-10x+7$.

b. $f(x)=3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$.

2. Dans chacun des cas suivants, indiquer la forme la plus adaptée et résoudre les inéquations :

a. $f(x)\leqslant 0$ b. $f(x)>7$ c. $f(x)\leqslant 6$

87 [Raisonner.]

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=-\left(x-\frac{13}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

C_f est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan.

À l'aide de l'outil **calcul formel** de GeoGebra, nous obtenons les résultats suivants.

1 Développer$\left(-\left(x-\frac{13}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$\rightarrow -x^2+7x-\frac{13}{4}$

2 FormeCanonique$\left(-\left(x-\frac{13}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$\rightarrow -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+9$

Dans chacun des cas suivants, indiquer la forme la plus adaptée et effectuer la tâche demandée :

1. Calculer $f(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=9$.
3. Dresser le tableau de signes de f.
4. Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.
5. Déterminer l'ensemble des abscisses des points de C_f se situant en dessous de l'axe des abscisses.