Exercices Second Degré

Ex 1 Donner la forme canonique des fonctions binôme du second degré suivantes et vérifier le résultat à la calculatrice.

a) $x^2 + 2x + 3$

b) $-2x^2 + 2x + 1$

c) $(2t+1)(1-t)$

---

a) En utilisant l'abscisse du sommet $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2\times 2} = -1$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec

$\beta = f(\alpha)$ et a coefficient de "x^2"

$\beta = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3$
$= 1 - 2 + 3 = 2$

$f(x) = 1(x-(-1))^2 + 2$

$f(x) = (x+1)^2 + 2$

b) En utilisant la factorisation de $a = -2$ et la construction d'une identité remarquable :

$f(x) = -2x^2 + 2x + 1$

$f(x) = -2(\underbrace{x^2 - x} - \frac{1}{2})$

$x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

donc

$f(x) = -2\left[(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right]$

$f(x) = -2\left[(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}\right]$

$f(x) = -2(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$

c) $f(t) = (2t+1)(1-t)$

$f(t) = 2t - 2t^2 + 1 - t$

$f(t) = -2t^2 + t + 1$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-2)} = \frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{4}) = -2(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} + 1$

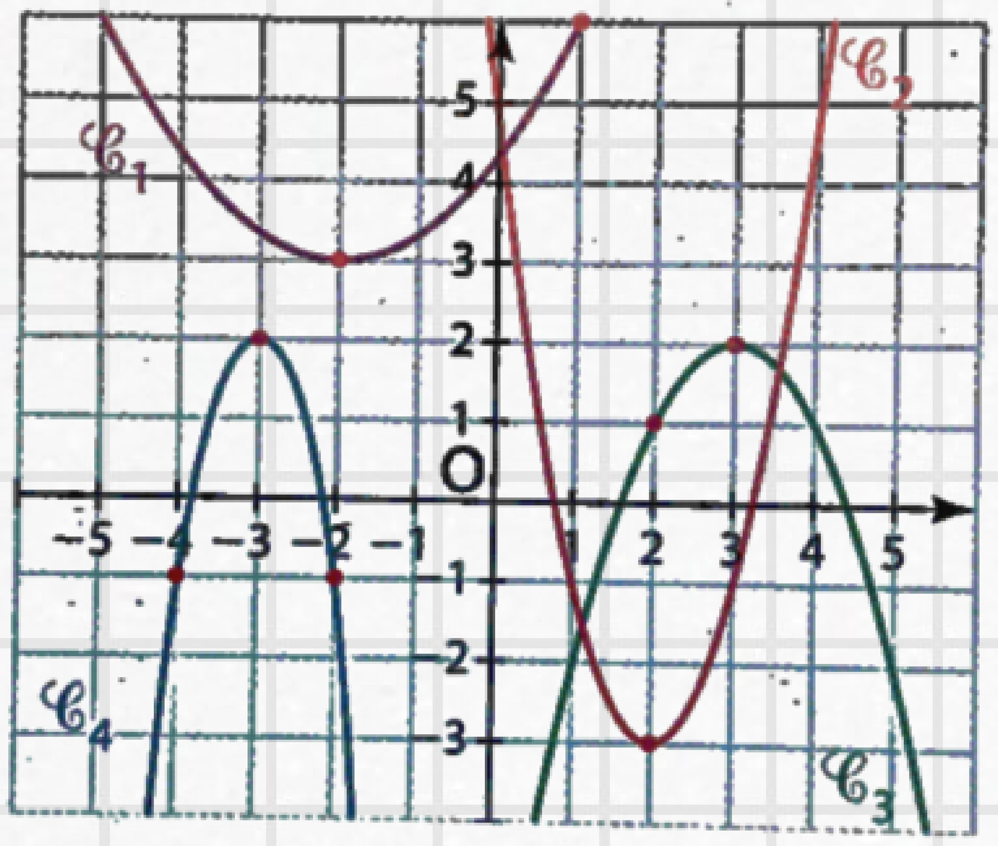
$f(\frac{1}{4}) = -2(\frac{1}{16}) + \frac{1}{4} + 1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1$

$f(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{8}{8} = \frac{9}{8}$

$f(t) = -2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8}$

Ex 2 Chacune des paraboles $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ construites ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction polynôme f de degré 2 de forme canonique :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$



1. Déterminer pour chacune d'elles, les valeurs de α, β et a.
2. Associer à chaque fonction polynôme trouvée sa forme développée.

a) $f(x) = -3x^2 - 18x - 25$ **b)** $g(x) = -x^2 + 6x - 7$

c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$ **d)** $k(x) = 2x^2 - 8x + 5$

---

1) $\mathscr{C}_1$: $\alpha = -2$ et $\beta = 3$

donc $f(x) = a(x-(-2))^2 + 3$

$f(x) = a(x+2)^2 + 3$

or $f(1) = 6$ donc

$a \times (1+2)^2 + 3 = 6$

$9a + 3 = 6$

$9a = 3$

$a = \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 3$ c

$\mathscr{C}_2$: $\alpha = 2$ et $\beta = -3$

$f(x) = a(x-2)^2 - 3$

or $f(1) = -1$ donc

$a(1-2)^2 - 3 = -1$

$\underbrace{(-1)^2}_{1} a = -1+3$

$a = 2$

$f(x) = 2(x-2)^2 - 3$ d

$\mathscr{C}_3$: $\alpha = 3$ $\beta = 2$

$f(x) = a(x-3)^2 + 2$

or $f(1) = -2$ donc

$a(-2)^2 + 2 = -2$

$a \times 4 = -4$ donc $a = \frac{-4}{4} = -1$

$f(x) = -(x-3)^2 + 2$ b

$\mathscr{C}_4$: $\alpha = -3$ et $\beta = 2$

$f(x) = a(x-(-3))^2 + 2$

$f(x) = a(x+3)^2 + 2$

or $f(-2) = -1$

donc $a(-2+3)^2 + 2 = -1$

$a = -3$

$f(x) = -3(x+3)^2 + 2$ a

---

2) Les numéros associé aux fonctions apparaissent en 1). Il suffit de développer les expressions pour répondre à la question.

---

ex 3

g est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5(x+1)(x-6)$.
$\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de g dans un repère.
a) Écrire les formes développée et canonique de la fonction polynôme g.
b) Choisir l'écriture la plus adéquate pour déterminer :
- les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{C}_g$;
- les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et de l'axe des abscisses ;
- l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et de l'axe des ordonnées.

a) $g(x) = -5(x+1)(x-6)$ (FF)

$g(x) = -5(x^2 - 6x + x - 6)$

$g(x) = -5(x^2 - 5x - 6)$

$g(x) = -5x^2 + 25x + 30$ (FD)

$$\alpha = \frac{-25}{2(-5)} = \frac{-25}{-10} = \frac{5}{2}$$

$$g\left(\frac{5}{2}\right) = -5\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 25\times\frac{5}{2} + 30$$
$$= \frac{245}{4}$$

$$g(x) = -5\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{245}{4} \quad \text{(FC)}$$

b) (FC) . Nommons S le sommet de la parabole.
$S(\alpha ; \beta)$ donc par identification
$S\left(\frac{5}{2} ; \frac{245}{4}\right)$

(FF) : Rechercher les abscisses des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses revient à résoudre $g(x) = 0$.
Soit $-5(x+1)(x-6) = 0$
les abscisses sont donc $x = -1$ et $x = 6$

(FD) : Trouver cette ordonnée revient à calculer $g(0)$. La forme développée est la plus adaptée : $g(0) = 30$

---

ex 4 Etudier les variations des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$

b) $g(t) = t^2 + t - 2$

c) $h(x) = 2x^2 + 5$

d) $i(x) = -(x+2)(x+4)$

---

a) $-3 < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas

$\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
variations de f	↗	-1	↘

b) $1 > 0$ $\alpha = \frac{-1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$

$$g(\alpha) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4} = \frac{-9}{4}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
variations de g	↘	$-\frac{9}{4}$	↗

c) $2 > 0$ $\alpha = 0$ $\beta = 5$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de h	↘	5	↗

d) L'abscisse du sommet est le centre de l'intervalle formé par les 2 racines : -4 et -2 donc $\alpha = \frac{-4-2}{2} = -3$.

Le coefficient des "x^2" est $-1<0$

$i(-3) = -(-3+2)(-3+4) = 1 = \beta$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
variations de i	$\nearrow$	1	$\searrow$

ex5 Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - 11x - 21 = 0$

b) $7x^2 - 9x = 0$

c) $\frac{1}{3}x^2 + x + 1 = 0$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

e) $x^2 + 9 = 0$

---

a) $\Delta = (-11)^2 - 4\times 2(-21) = 289 > 0$

donc l'équation admet deux solutions :

$x_1 = \frac{11 - \sqrt{289}}{2\times 2} = \frac{11-17}{4} = -\frac{3}{2}$

et $x_2 = \frac{11 + \sqrt{289}}{2\times 2} = \frac{11+17}{4} = 7$

b) $7x^2 - 9x = 0$

$x(7x - 9) = 0$

Cette équation admet deux solutions $x = 0$ et $7x - 9 = 0$ soit $x = \frac{9}{7}$.

c) $\Delta = (1)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right)(1) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0$

donc cette équation n'admet pas de solution.

d) $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times \frac{1}{4} = 0$

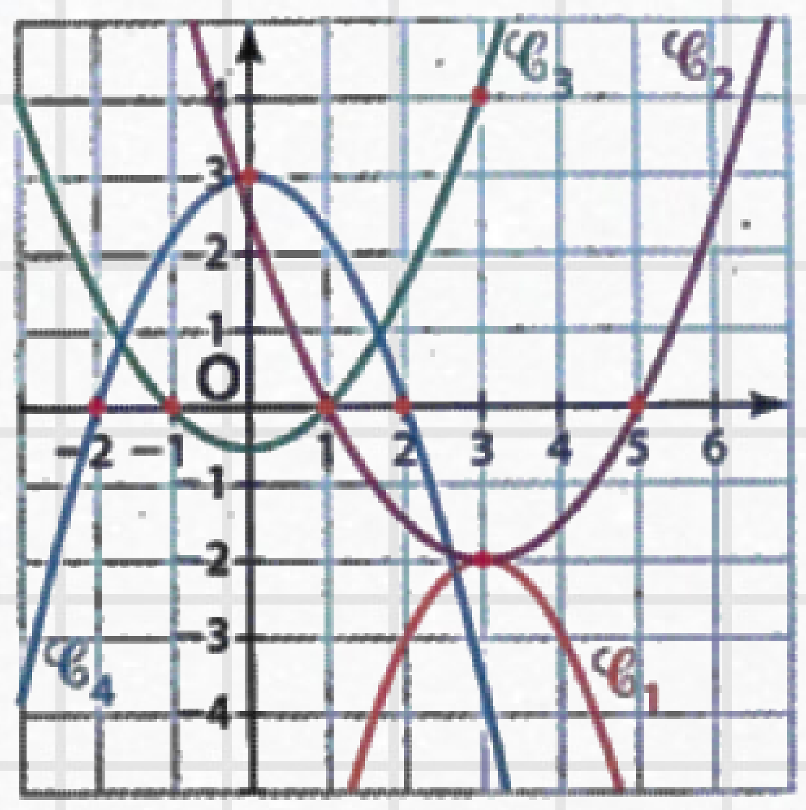
donc l'équation admet une unique solution $x_0 = \frac{1}{2}$

e) $x^2 + 9 = 0$ n'admet pas de solution car $x^2 \geqslant 0$ et $9>0$ donc $x^2+9>0$.

on peut calculer $\Delta = -4\times 9 < 0$

---

ex6 Les paraboles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ tracées ci-contre représentent quatre fonctions polynômes de degré 2. Écrire, lorsque cela est possible, la forme factorisée de chacune de ces fonctions.



on repère les racines (abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses). on construit la forme factorisée et on calcule "a" avec les coordonnées d'un point de la courbe.

• $\mathscr{C}_1$ ne coupe pas l'axe des abscisses donc f_1 ne possède pas de forme factorisée.

• C_2 coupe l'axe des abscisses en 2 points d'abscisses 1 et 5

donc $f_2(x) = a(x-1)(x-5)$

et $f_2(3) = -2$ donc

$a(3-1)(3-5) = -2$

$a(2)(-2) = -2$

donc $a = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\underline{f_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)}$

• C_3 : les 2 racines sont -1 et 1 donc

$f_3(x) = a(x+1)(x-1)$

et $f_3(3) = 4$

$a(3+1)(3-1) = 4$ soit $a \times 4 \times 2 = 4$ donc $a = \frac{1}{2}$

$\underline{f_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)}$

• C_4 : $f_4(x) = a(x+2)(x-2)$

et $f_4(0) = 3$ donc $a \times 2(-2) = 3$ soit $a = -\frac{3}{4}$

$\underline{f_4(x) = -\frac{3}{4}(x+2)(x-2)}$

ex 7

f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)^2 - 16$.

a) Écrire les formes développée et factorisée de la fonction f.

b) Choisir l'écriture la plus adéquate pour résoudre chacune des équations :

• $f(x) = 0$ • $f(x) = -7$ • $f(x) = 2$

a) $f(x) = x^2 + 6x + 9 - 16 = \underline{x^2 + 6x - 7}$

$f(x) = (x+3)^2 - 4^2 = (x+3-4)(x+3+4)$

$= \underline{(x-1)(x+7)}$

b) • $f(x) = 0$ équivaut à $(x-1)(x+7) = 0$

soit $x - 1 = 0$ ou $x + 7 = 0$

l'équation admet 2 solutions $x = 1$ et $x = -7$

• $f(x) = -7$ équivaut à

$x^2 + 6x - 7 = -7$

$x^2 + 6x = 0$

$x(x+6) = 0$

Cette équation admet deux solutions $x = 0$ et $x = -6$

• $f(x) = 2$ équivaut à :

$x^2 + 6x - 7 = 2$

$x^2 + 6x - 7 - 2 = 0$

$x^2 + 6x - 9 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 72$

$x_1 = -3 - 3\sqrt{2}$ et $x_2 = -3 + 3\sqrt{2}$

sont les 2 solutions de l'équation.

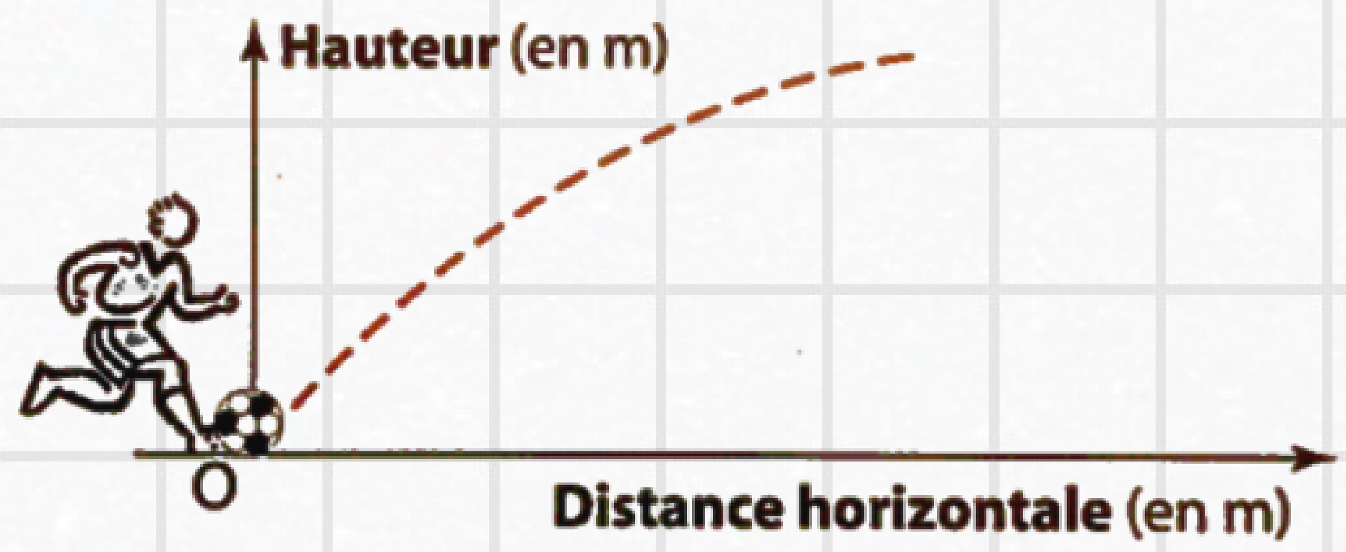
ex 8

La trajectoire du ballon dégagé par un gardien de but est modélisée dans un repère par un arc de parabole. La parabole représente la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{x^2}{32} + x$$

a) À quelle distance du gardien le ballon retombe-t-il ?

b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?



a) $f(x) = x\left(-\frac{x}{32} + 1\right)$

$f(x) = 0$ possède 2 solutions $x = 0$

et $-\frac{x}{32} + 1 = 0$ soit $x = 32$

Le ballon retombe donc à 32 m.

b) L'abscisse du sommet S de la parabole est située au milieu des 2 racines $x_S = \frac{0+32}{2} = 16$

La hauteur maximale atteinte par le ballon est $f(16) = 8$ m.

ex9 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

b) $\frac{1}{6}t^2 - t + \frac{3}{2} \leq 0$

c) $\frac{1}{6}x^2 + x + 1 > 0$

d) $2x^2 + 9 \geq 0$

a) $a = -1 < 0$

$-x^2 + 3x - 2$ possède 2 racines : 1 et 2

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-x^2 + 3x - 2$ est du signe de -1 à l'extérieur des racines.

$-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ pour $x \in [1;2]$

b) $a = \frac{1}{6} > 0$

$\frac{1}{6}t^2 - t + \frac{3}{2}$ possède une unique racine 3 $(\Delta = 0)$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de		$+$	0	$+$	

$\frac{1}{6}t^2 - t + \frac{3}{2} \leq 0$ pour $x = 3$

c) $\frac{1}{6} > 0$ et $\frac{1}{6}x^2 + x + 1$ possède 2 racines $-3-\sqrt{3}$ et $-3+\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{3}$		$-3+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de		$+$	0	$-$	0	$+$	

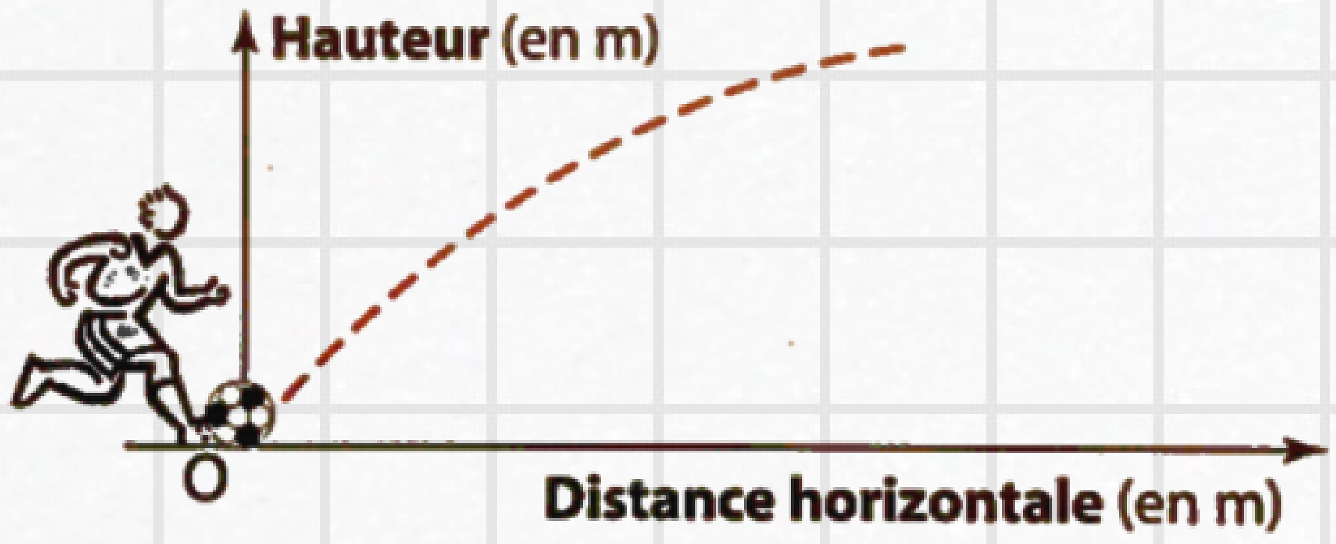
$\frac{1}{6}x^2 + x + 1 > 0$ pour $x \in]-\infty; -3-\sqrt{3}[\cup]-3+\sqrt{3}; +\infty[$

ex8

La trajectoire du ballon dégagé par un gardien de but est modélisée dans un repère par un arc de parabole. La parabole représente la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{x^2}{32} + x$$

a) À quelle distance du gardien le ballon retombe-t-il ?
b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?



ex9 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-x^2 + 3x - 2 \geqslant 0$

b) $\frac{1}{6}t^2 - t + \frac{3}{2} \leqslant 0$

c) $\frac{1}{6}x^2 + x + 1 > 0$

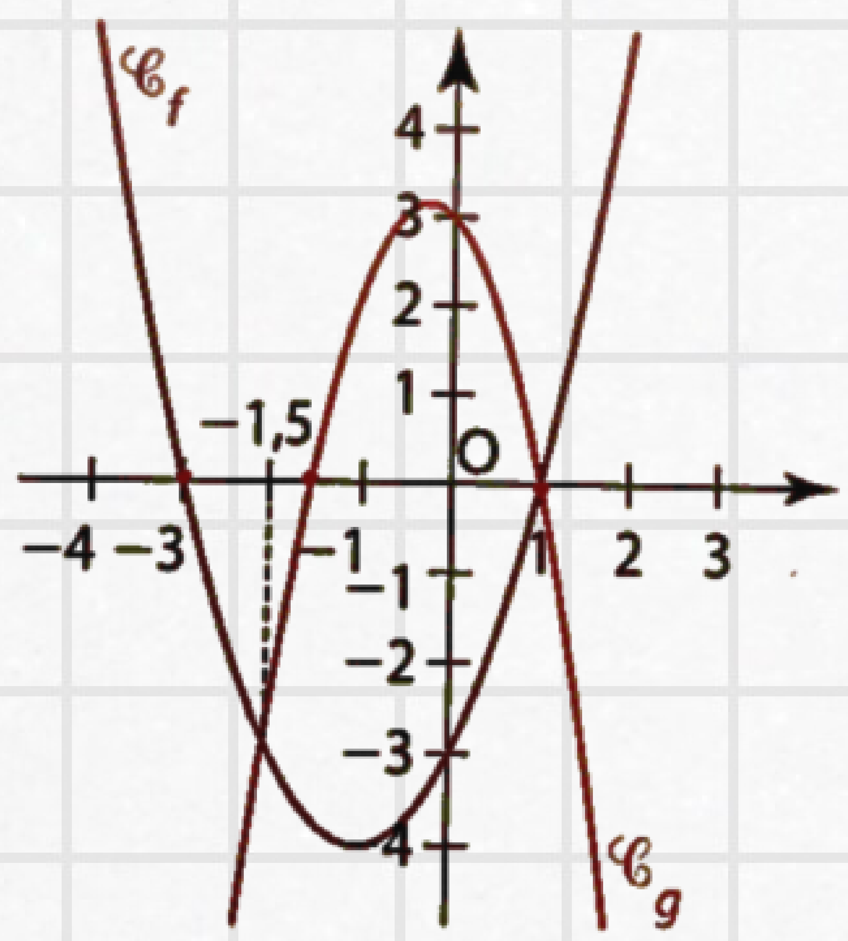
d) $2x^2 + 9 \geqslant 0$

ex10

f et g sont les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$
$$\text{et } g(x) = -2x^2 - x + 3$$

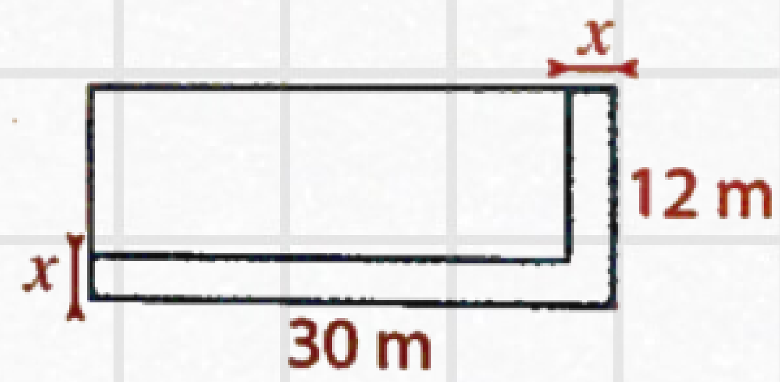
On a tracé ci-dessous dans un repère, les courbes représentatives de f et g.



1. Résoudre par lecture graphique chacune des inéquations suivantes.
a) $f(x) \geqslant 0$ **b)** $g(x) < 0$ **c)** $f(x) \leqslant g(x)$
2. Retrouver par le calcul les résultats précédents.

ex11

Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et pour largeur 12 m. On désire aménager un chemin de largeur x (en mètres) le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-contre.



La largeur x du chemin doit être supérieure à 0,8 m et on souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m².
a) Indiquer un intervalle dans lequel se trouve la largeur x du chemin.
b) Vérifier que la condition sur l'aire de la partie restante se traduit par l'inéquation $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$.
c) Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

ex12

Les fonctions profits, en milliers d'euros, de deux firmes sont définies par :
$P_1(q) = -q^2 + 16q - 39$ et $P_2(q) = -q^2 + 24q - 108$
où q représente le volume de production, c'est-à-dire la quantité produite en milliers d'unités : $0 \leqslant q \leqslant 20$.
a) Calculer, pour chaque firme, les volumes de production pour lesquels le profit est positif.
b) Pour quel volume de production les deux firmes feront-elles le même profit ?
Calculer ce profit à l'euro près.
c) Pour quels volumes de production la seconde firme se montre-t-elle plus rentable que la première tout en ayant un profit positif ?

ex13

La distance de freinage d (en m) d'une voiture qui roule à une vitesse v (en km · h⁻¹) est donnée par la formule :

$$d = \frac{v}{5} + \frac{v^2}{150}$$

a) Une voiture roule à 120 km · h^{-1}. Quelle est sa distance de freinage ?
b) Une voiture s'arrête sur 72 m. Quelle était sa vitesse au début du freinage ?
c) À quelle vitesse doit-on rouler pour s'arrêter sur moins de 60 m ?

ex 14

Le directeur d'un parc de loisirs reçoit en moyenne 600 visiteurs par jour lorsque le prix de l'entrée est fixé à 23 €. Lorsque le prix de l'entrée baisse de 1 €, le parc enregistre 60 entrées supplémentaires.

a) Pour une baisse du prix de l'entrée de x € (x entier), calculer la recette journalière du parc.

b) Le directeur souhaite que la recette soit supérieure à 17 000 €. Traduire cette condition par une inéquation.

c) Résoudre l'inéquation obtenue. Le directeur peut-il atteindre son objectif ?

ex 15

Équations bicarrées

1. On se propose de résoudre l'équation (E) :

$$2x^4 + 11x^2 - 6 = 0$$

a) Poser $X = x^2$. Résoudre alors l'équation obtenue d'inconnue X.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation initiale (E).

2. Résoudre chaque équation en procédant comme ci-dessus.

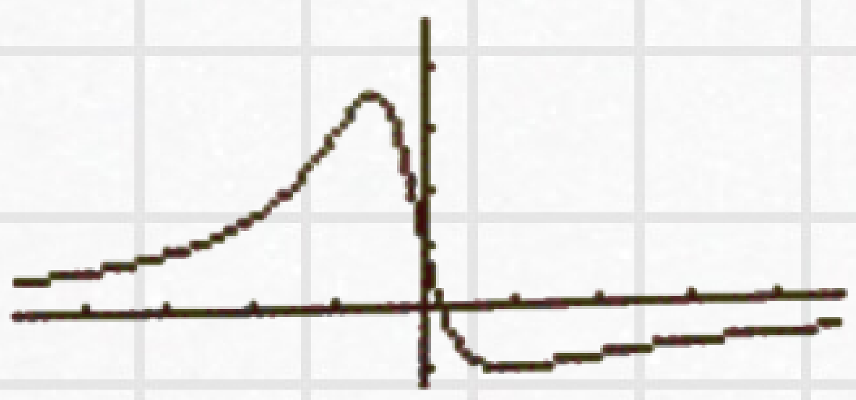
a) $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ **b)** $4x^4 + 37x^2 + 9 = 0$

c) $-\frac{9}{4}x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ **d)** $x^4 + x^2 + 1 = 0$

ex 16

f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-5x+1}{2x^2+x+1}.$$



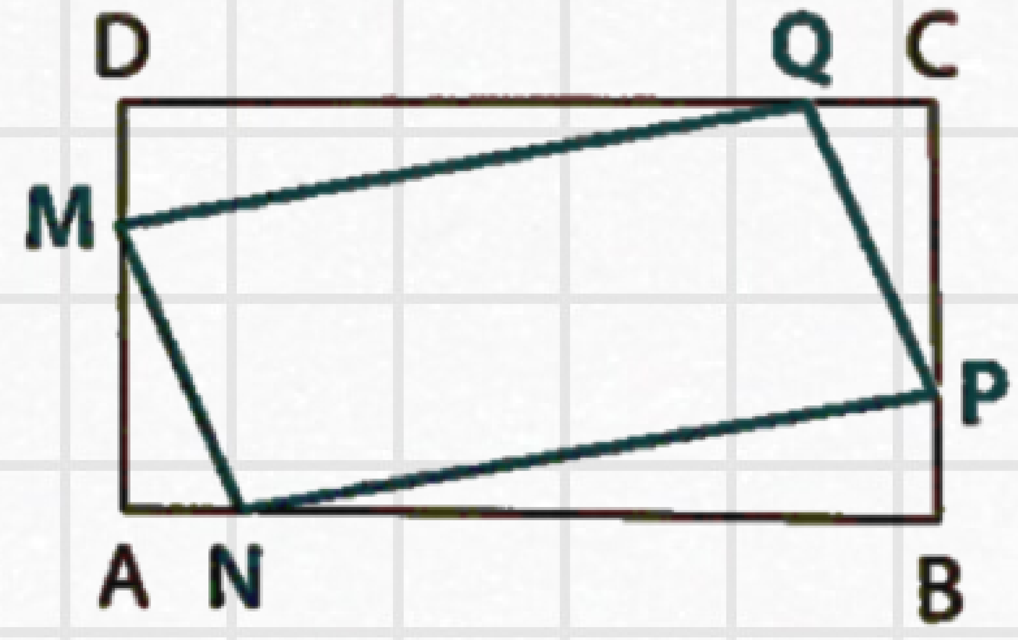
Après avoir justifié que f est définie pour tout nombre x, démontrez que la représentation graphique de f dans un repère orthonormé est entièrement contenue dans une bande de plan de largeur 5.

ex 17

Une aire minimale

ABCD est un rectangle tel que AB = 8 et AD = 4.
M est un point de [AD] tel que DM = x, avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.
On construit les points N, P et Q tels que :

$$DM = AN = BP = CQ.$$

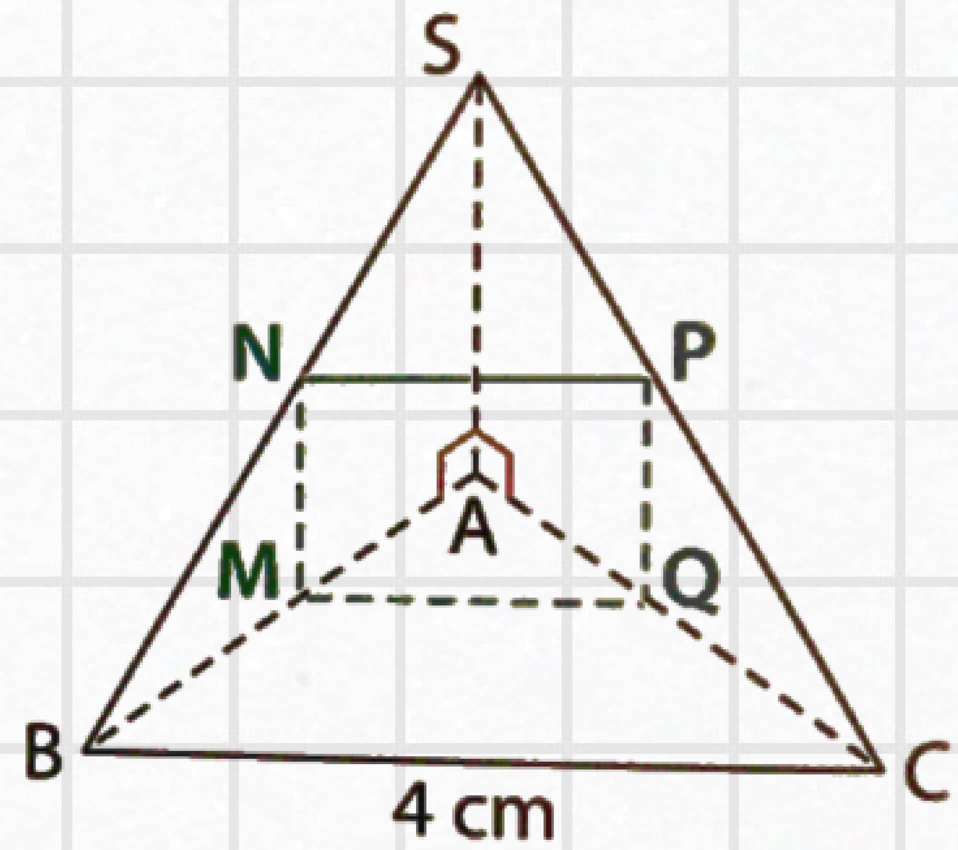


Trouver les valeurs de x pour lesquelles l'aire du quadrilatère MNPQ est minimale.

ex 18

SABC est une pyramide dont la base ABC est un triangle équilatéral et dont l'arête (SA) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AC). On sait que AB = 4 cm et SA = 2 cm. M est un point de [AB]. À partir de ce point on construit le rectangle MNPQ comme indiqué sur la figure : (MN) est parallèle à (AS) et (MQ) est parallèle à (BC).

L'objectif est de choisir le point M tel que l'aire du rectangle MNPQ soit maximale.

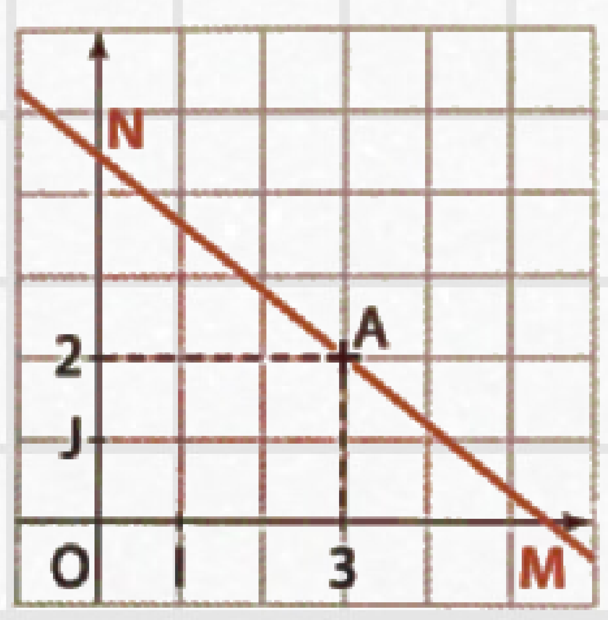


1. On pose AM = x.
Démontrez que :
aire (MNPQ) $= -\frac{x^2}{2} + 2x$.

2. Déduisez-en la ou les solutions du problème.

ex 19

Dans un repère orthonormé (O; I, J), le point A a pour coordonnées (3; 2).
M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées (m; 0) avec $m > 3$. La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en N.



1. a) Démontrez que ON $= \frac{2m}{m-3}$.

b) Déduisez-en que l'aire du triangle OMN est égale à $\frac{m^2}{m-3}$.

2. Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquel aire(OMN) $\leqslant 16$?

ex 20

Position relative de courbes

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2} \text{ et } g(x) = -x^2 - 3x.$$

1. Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

2. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$? Contrôler graphiquement ces résultats.