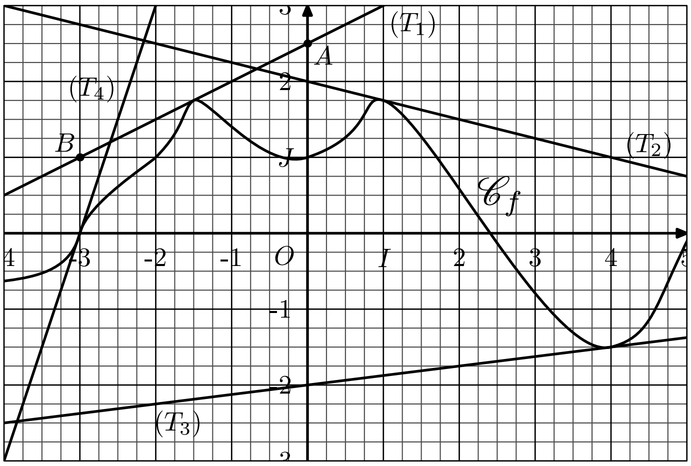
Exercice 1

Ci-dessous est représentée, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et quatre de ses tangentes :



1. La droite (T_1) s'appelle :

   "*La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$*"

   Nommer de même les trois autres droites.

2. Déterminer l'équation réduite de chacune de ces quatres tangentes.

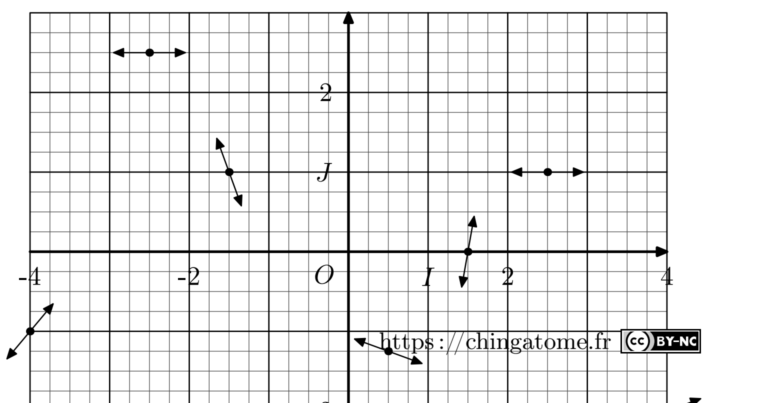
Correction 1

1. Voici les intitulés possibles des trois autres droites :
   - (T_2) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ;
   - (T_3) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 ;
   - (T_4) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

2. Déterminons les équations réduites de ces quatre tangentes.
   - La droite (T_1) passe par les points :
     $A(-3\,;1)\quad;\quad B(0\,;2{,}5)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2{,}5-1}{0-(-3)}=\frac{1{,}5}{3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :
     $$y=\frac{1}{2}\cdot x+b$$
     Les coordonnées du point B vérifient cette équation :
     $$2{,}5=\frac{1}{2}\times 0+b$$
     $$b=2{,}5$$
     La droite (T_1) admet pour équation réduite :
     $$(T_1):\ y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5}{2}$$
   - La droite (T_2) passe par les points :
     $A(0\,;2)\quad;\quad B(4\,;1)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2}{4-0}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :
     $$y=-\frac{1}{4}\cdot x+b$$
     Les coordonnées du point A vérifient cette équation :
     $$2=-\frac{1}{4}\times 0+b$$
     $$b=2$$
     La droite (T_2) admet pour équation réduite :
     $$(T_2):\ y=-\frac{1}{4}\cdot x+2$$
   - La droite (T_3) passe par les points :
     $A(\,0\,;-2\,)\quad;\quad B(\,4\,;-1{,}5\,)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1{,}5-(-2)}{4-0}=\frac{0{,}5}{4}=\frac{1}{8}$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :
     $$y=\frac{1}{8}\cdot x+b$$
     Les coordonnées du point A vérifient cette équation :
     $$-2=\frac{1}{8}\times 0+b$$
     La droite (T_3) admet pour équation réduite :
     $$(T_3):\ y=\frac{1}{8}\cdot x-2$$
   - La droite (T_4) passe par les points :
     $A(-2\,;3)\quad;\quad B(-3\,;0)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{-3-(-2)}=\frac{-3}{-1}=3$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :
     $$y=3\cdot x+b$$
     Les coordonnées du point B vérifient cette équation :
     $$0=3\times-3+b$$
     $$0=-9+b$$
     $$b=9$$
     La droite (T_4) admet pour équation réduite :
     $$(T_4):\ y=3\cdot x+9$$

Exercice 2

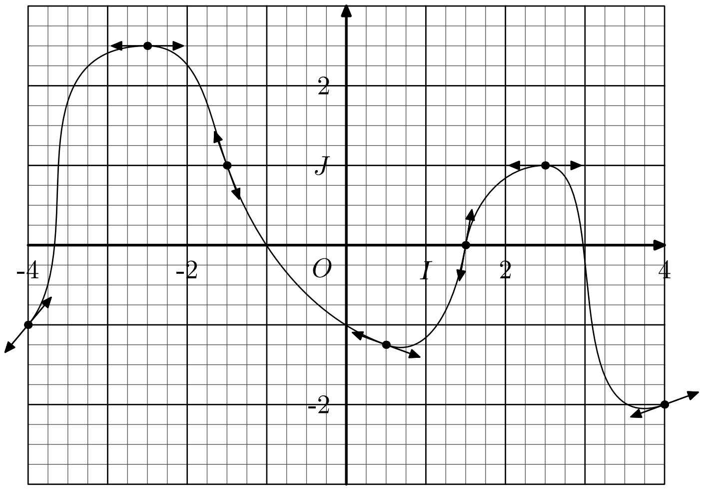
Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiquées et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :

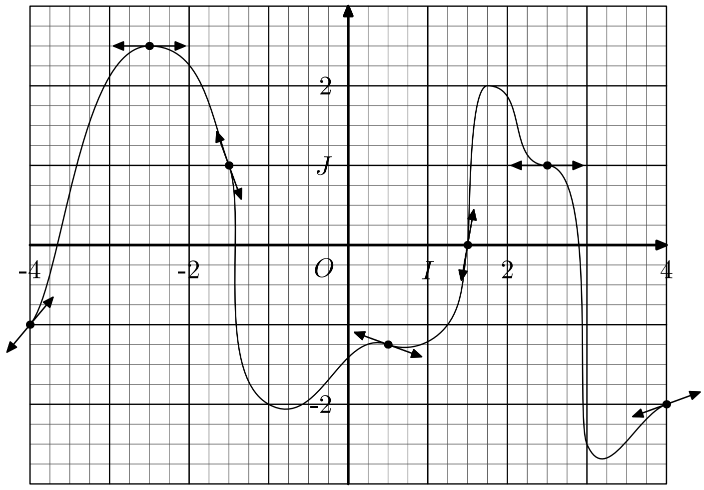


https://chingatome.fr (cc) BY-NC

Correction 2

Voici deux fonctions vérifiant les points et les tangentes imposés :





Exercice 3

On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{2{\cdot}x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x)=\frac{2{\cdot}x^2+x}{5{\cdot}x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2{,}1}{3{,}01}$	$\frac{2{,}01}{3{,}000\,1}$	$\frac{2{,}00\,1}{3{,}000\,001}$	$\frac{2{,}000\,1}{3{,}000\,000\,01}$

x	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	$\frac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\frac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$	$\frac{-0{,}999\,998}{0{,}00\,1}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0{,}12}{0{,}5}$	$\frac{0{,}010\,2}{0{,}05}$	$\frac{0{,}001\,002}{0{,}005}$	$\frac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$

Remarquer que, dans chaque tableau, les valeurs de x “*progressent lentement*” vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs approchées de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :
   “*x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*”
   Pour la fonction f, cette valeur se note :
   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

2. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au “*voisinage*” de l'axe des ordonnées.

Correction 3

1. a. Voici les trois tableaux de valeurs dont les images ont été arrondies à 10^{-4} près :

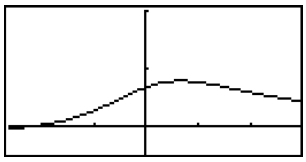
x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,75	0,6977	0,6700	0,06670	0,6666

x	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	$-9{,}8000$	$-99{,}98$	-999,998

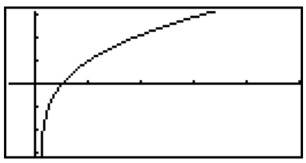
x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	0,6	0,24	0,204	0,2004	0,2000

   b. Voici les trois conjectures qu'on peut établir à la vue de ces tableaux de valeurs :
   $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)=\frac{2}{3}$; $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} h(x)=\frac{1}{5}$

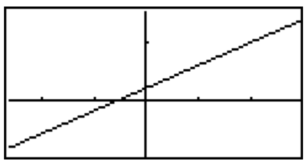
2.
- Voici la représentation de la courbe de la fonction f :



- Voici la représentation de la courbe de la fonction g :



- Voici la représentation de la courbe de la fonction h :



 BY-NC

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} h-2$ b. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h^2+h}{h}$

c. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{5h^3+2h^2}{h}$ d. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{h+1}{h+2}$

e. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h^2+h}{3h}$ f. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{h^3+2h^2}{2h}$

Correction 4

a. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} h-2=-2$

b. On a la transformation algébrique :
$$\frac{2h^2+h}{h}=\frac{h\cdot(2h+1)}{h}=2h+1$$
On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h^2+h}{h}=\lim_{h\mapsto 0}2h+1=1$

c. On a la transformation algébrique :
$$\frac{5h^3+2h^2}{h}=\frac{h\cdot(5h^2+2h)}{h}=5h^2+2h$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{5h^3+2h^2}{h}=\lim_{h\mapsto 0}5h^2+2h=0$$

d. On a la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{h+1}{h+2}=\frac{1}{2}$

e. On a la transformation algébrique :
$$\frac{2h^2+h}{3h}=\frac{2}{3}\cdot h+\frac{1}{3}$$
On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h^2+h}{3h}\lim_{h\mapsto 0}\frac{2}{3}\cdot h+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

f. On a la transformation algébrique :
$$\frac{h^3+2h^2}{2h}=\frac{h\cdot(h^2+2h)}{2h}=\frac{h^2+2h}{2}=\frac{1}{2}\cdot h^2+h$$
On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{h^3+2h^2}{2h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{2}\cdot h^2+h=0$

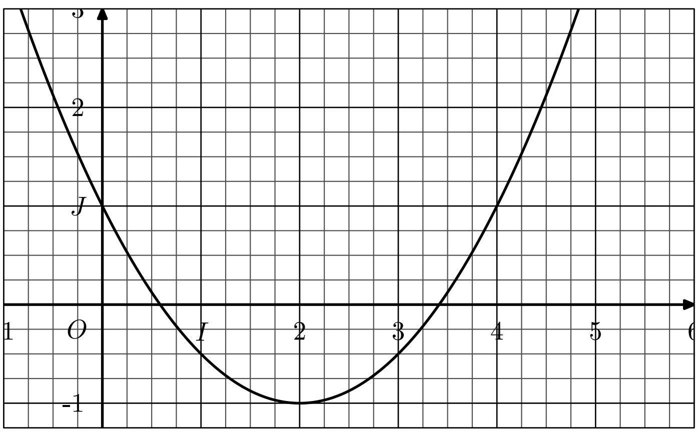
Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f:x\longmapsto\frac{1}{2}\cdot x^2-2\cdot x+1$$

1. a. Montrer que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, on a :
$$f(4+h)-f(4)=\frac{1}{2}\cdot h^2+2\cdot h$$

b. Déterminer la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

2. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



a. Tracer dans le repère ci-dessous, la droite (d) admettant pour équation réduite : $y=2x-7$

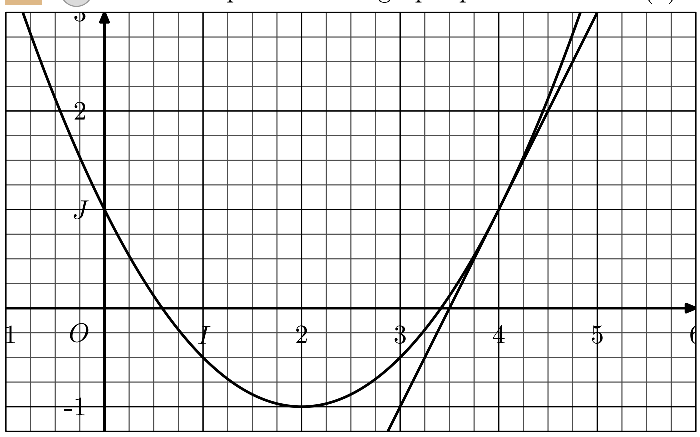
b. Justifier que la droite (d) est une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ dont on précisera le point de contact.

Correction 5

1. a. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$f(4+h)-f(4)=\Big[\frac{1}{2}\cdot(4+h)^2-2(4+h)+1\Big]-\Big(\frac{1}{2}\times4^2-2\times4+1\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(16+8h+h^2)-8-2h+1-\Big(\frac{1}{2}\times16-8+1\Big)$$
$$=8+4h+\frac{1}{2}h^2-8-2h+1-(8-8+1)$$
$$=\frac{1}{2}h^2+2h+1-1=\frac{1}{2}h^2+2h$$

b. Ainsi, le quotient a pour valeur :
$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{-\frac{1}{2}h^2-4h}{h}=\frac{h\cdot\big(\frac{1}{2}h+2\big)}{h}=\frac{1}{2}h+2$$
On en déduit que lorsque h tend vers 0, cette expression tend vers 2. On obtient la limite :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{2}h+2=2$$

2. a. Voici la représentation graphique de la droite (d) :



On remarque que cette droite est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.

b. L'image du nombre 4 par la fonction f a pour valeur :
$$f(4)=\frac{1}{2}\times4^2-2\times4+1=\frac{1}{2}\times16-8+1$$
$$=8-8+1=1$$
Notons A le point de coordonnées $(4\,;1)$

- La droite (d) a pour coefficient directeur 2 qui est aussi le nombre dérivée de la fonction f pour $x=2$. Ainsi, la droite (d) est parallèle à la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
- La droite (d) passe par le point A :
$2x-7=2\times4-7=8-7=1$

On en déduit que la droite (d) est confondu avec la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

BY-NC

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par la relation : $f(x)=\sqrt{2{\cdot}x+1}$

1. a. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\frac{2}{\sqrt{2{\cdot}h+9}+3}$$

   b. En déduire la limite du nombre dérivée de la fonction f en 4 :
$$f'(4)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}$$

2. a. Donner les coordonnées du point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 4.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Correction 6

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\frac{\sqrt{2{\cdot}(4+h)+1}-\sqrt{2{\times}4+1}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{2{\cdot}h+9}-\sqrt{9}}{h}$$
Le facteur $\sqrt{2{\cdot}h{+}9}{+}3$ est non-nul :
$$=\frac{\big(\sqrt{2{\cdot}h{+}9}{-}3\big)\big(\sqrt{2{\cdot}h{+}9}{+}3\big)}{h{\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}=\frac{2{\cdot}h+9-3^2}{h{\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}$$
$$=\frac{2{\cdot}h}{h{\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}=\frac{2}{\sqrt{2{\cdot}h+9}+3}$$

   b. Ainsi, le nombre dérivée de la fonction f en 4 s'obtient à l'aide de la limite suivante :
$$f'(4)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2}{\sqrt{2{\cdot}h+9}+3}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2. Le point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 4 a pour coordonnées :
$A\big(4\,;f(4)\big)=(4\,;3)$.

3. Le nombre dérivée de la fonction f en 4 a pour valeur $\frac{1}{3}$: la tangente au point d'abscisse 4 à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{3}$.
Cette tangente admet une équation réduite de la forme :
$y=\frac{1}{3}x+b$ où $b\in\mathbb{R}$.

Le point A appartenant à la tangente (d), ses coordonnées vérifient l'équation réduite de cette droite :
$$y=\frac{1}{3}{\cdot}x+b$$
$$3=\frac{1}{3}{\times}4+b$$
$$b=3-\frac{4}{3}$$
$$b=\frac{5}{3}$$
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 a pour équation réduite :
$$y=\frac{1}{3}{\cdot}x+\frac{5}{3}$$

Exercice 7

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$f(x)=2{\cdot}x^3-3{\cdot}x^2-x+1$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1. a. Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'identité :
$$\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=2{\cdot}h^2+3{\cdot}h-1$$

   b. Quel est le coefficient directeur de la tangente (T) ? Justifier votre démarche.

2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. a. Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'identité :
$$f(x)+x=(x-1){\cdot}\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$$

   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la tangente (T).

Correction 7

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}$$
$$=\frac{\big[2(1{+}h)^3{-}3(1{+}h)^2{-}(1{+}h){+}1\big]{-}\big(2{\times}1^3{-}3{\times}1^2{-}1{+}1\big)}{h}$$
$$=\frac{2(1+h)(1+h)^2-3(1+2h+h^2)-1-h+1-(-1)}{h}$$
$$=\frac{(2+2h)(1+2{\cdot}h+h^2)-3-6h-3h^2-h+1}{h}$$
$$=\frac{\big(2+4{\cdot}h+2{\cdot}h^2+2{\cdot}h+4{\cdot}h^2+2{\cdot}h^3\big)-3{\cdot}h^2-7{\cdot}h-2}{h}$$
$$=\frac{2{\cdot}h^3+3{\cdot}h^2-h}{h}=\frac{h{\cdot}\big(2{\cdot}h^2+3{\cdot}h-1\big)}{h}=2{\cdot}h^2+3{\cdot}h-1$$

   b. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est le nombre dérivée de la fonction f en 1. Sa valeur est :
$$f'(1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}2{\cdot}h^2+3{\cdot}h-1=-1$$
Ainsi, la tangente (T) a pour coefficient directeur -1.

2. La tangente (T) ayant -1 pour coefficient, son équation réduite est de la forme :

 BY-NC

$y = -x + b \qquad \text{où } b \in \mathbb{R}$

Le point de contact $(1\,;-1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente (T). Ses coordonnées vérifient l'équation réduite de (T) :

$$-1 = -1\times1 + b$$
$$b = -1 + 1$$
$$b = 0$$

La tangente (T) admet pour équation réduite :

$$y = -x$$

3. (a.) Donnons l'expression développée et réduite des deux membres de l'égalité :

- $f(x) + x = \big(2x^3 - 3x^2 - x + 1\big) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
- $(x-1)(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c)$
$$= \big(a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x\big) - \big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big)$$
$$= a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x - a{\cdot}x^2 - b{\cdot}x - c$$
$$= a{\cdot}x^3 + \big(b-a\big){\cdot}x^2 + \big(c-b\big) - c$$

Par identification des mônomes de même degré de ces deux formes développées et réduites, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 0 \\ -c = 1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que les valeurs de a, b et c solutions de ce système sont :

$$a = 2 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -1$$

Ainsi, on obtient la factorisation suivante :

$$f(x) + x = \big(x-1\big)\big(2{\cdot}x^2 - x - 1\big)$$

(b.) Les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (T) doivent avoir leur abscisse solution de l'équation :

$$f(x) = -x$$
$$f(x) + x = 0$$

D'après la question (a.), on a :

$$\big(x-1\big){\cdot}\big(2{\cdot}x^2 - x - 1\big) = 0$$

Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$x - 1 = 0$	$2x^2 - x - 1 = 0$
$x = 1$	

Etudions la seconde équation.

Le membre de gauche de cette équation est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2 - 4\times2\times(-1) = 1 + 8 = 9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette équation admet les deux solutions suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)-3}{2\times2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)+3}{2\times2} = \frac{4}{4} = 1$$

Ainsi, cette équation admet deux solutions :

$$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{1}{2}\,;\,1\Big\}$$

Déterminons les coordonnées des deux points de $\mathcal{C}_f$ admettant $-\frac{1}{2}$ et 1 pour abscisse :

- Pour $x = -\frac{1}{2}$:

$$f\Big(-\frac{1}{2}\Big) = 2\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)^3 - 3\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 - \Big(-\frac{1}{2}\Big) + 1$$
$$= -\frac{2}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Pour $x = 1$:

$$f\big(1\big) = 2\times1^3 - 3\times1^2 - 1 + 1$$
$$= 2 - 3 - 1 + 1 = -1$$

Ainsi, les deux poitns d'intersection de la droite (T) et de la courbe $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées :

$$\Big(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\Big) \quad ; \quad \big(1\,;-1\big)$$

Exercice 8

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \longmapsto -3{\cdot}x + 2$
2. $g : x \longmapsto 4{\cdot}x^2 - 4$
3. $h : x \longmapsto 2{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x$
4. $j : x \longmapsto 5{\cdot}x^3 - 2{\cdot}x^2$
5. $k : x \longmapsto -2{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x$
6. $\ell : x \longmapsto (3{\cdot}x + 11)(4 - x)$

Correction 8

1. La dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = -3 + 0$$

2. La dérivée de la fonction g admet pour expression :
$$g'(x) = 4\times(2x) + 0 = 8{\cdot}x$$

3. La dérivée de la fonction h a pour expression :
$$h(x) = 2\times(2{\cdot}x) + 3 = 4{\cdot}x + 3$$

4. La dérivée de la fonction j admet pour expression :
$$j'(x) = 5\times(3{\cdot}x^2) - 2\times(2{\cdot}x) = 15{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x$$

5. La dérivée de la fonction k admet pour expression :
$$k'(x) = -2\times(2{\cdot}x) + 2 = -4{\cdot}x + 2$$

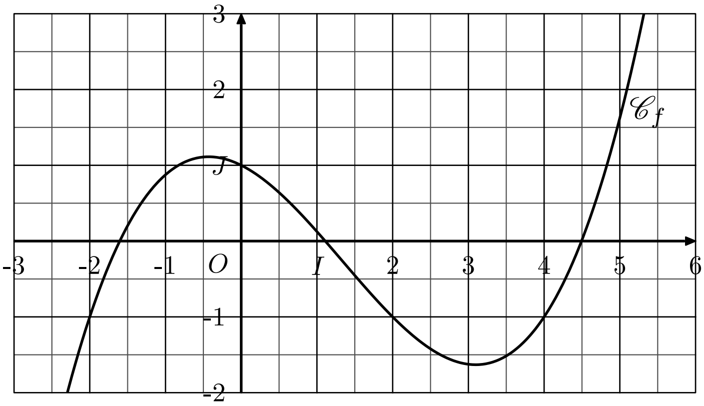
6. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\ell(x) = (3{\cdot}x + 11)(4 - x) = 12x - 3{\cdot}x^2 + 44 - 11x$$
$$= 3{\cdot}x^2 + x + 44$$
Cette expression de la fonction sous la forme d'une somme permet d'obtenir facielement l'expression de sa fonction dérivée :
Ainsi, la dérivée de la fonction ℓ est :
$$\ell'(x) = -3\times2{\cdot}x + 1 = -6{\cdot}x + 1$$

BY-NC

Exercice 9

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x + 1$$



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

   a. Donner la valeur du coefficient directeur de (T).

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).

   c. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T).

3. On considère la droite (d) admettant l'équation réduite :
   $(d):\ y = -x+1$
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Correction 9

1. L'expression de la fonction f étant donnée sous la forme d'une somme, on en déduit facilement l'expression de sa dérivée :
$$f'(x) = \frac{1}{8}\times(3x^2) - \frac{1}{2}\times(2x) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{8}\cdot x^2 - x - \frac{1}{2}$$

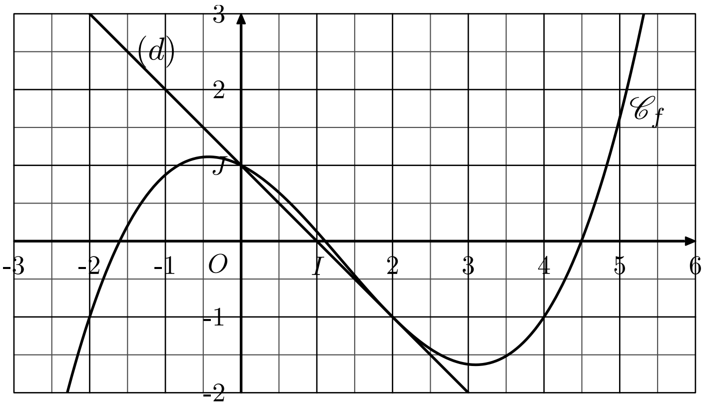
2. a. Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :
$$f'(2) = \frac{3}{8}\times 2^2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

   b. La droite (T) ayant pour coefficient directeur, son équation réduite admet pour expression :
   $(T):\ y = -x+b$ où $b\in\mathbb{R}$.

   L'image de 2 par la fonction f a pour valeur :
$$f(2) = \frac{1}{8}\times 2^3 - \frac{1}{2}\times 2^2 - \frac{1}{2}\times 2 + 1$$
$$= 1-2-1+1 = -1$$
   On en déduit que le point de coordonnées $A(2\,;-1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$; étant le point de contact de la tangente (T) avec la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit que le point A appartient aussi à la droite (T).

   Ainsi, les coordonnées du point A vérifient l'équation réduite de la tangente (T) :
$$y = -x+b$$
$$-1 = -2+b$$
$$-1+2 = b$$
$$b = 1$$
   Ainsi, la droite (T) admet pour équation réduite :
   $y = -x+1$

   c. Voici la représentation de la droite (T) :



3. Les abscisses des points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d) vérifient l'équation :
$$f(x) = -x+1$$
$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x + 1 = -x+1$$
   Multiplions par 8 les deux membres de cette équation :
$$x^3 - 4\cdot x^2 - 4\cdot x + 8 = -8\cdot x + 8$$
$$x^3 - 4\cdot x^2 - 4x + 8\cdot x = 0$$
$$x^3 - 4\cdot x^2 + 4\cdot x = 0$$
$$x\cdot\big(x^2 - 4\cdot x + 4\big) = 0$$
   En reconnaissant la seconde identité remarquable :
$$x\cdot(x-2)^2 = 0$$
   Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
   Cette équation admet pour ensemble de solution :
   $\mathcal{S} = \big\{0\,;\,2\big\}$

   Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (d) admettent deux points d'intersection ayant pour abscisse 0 et 1. Ces deux points d'intersection ont pour coordonnées :
   $A(0\,;1)$; $B(2\,;-1)$

Exercice 10

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$f:\ x\longmapsto(3\cdot x^2+3\cdot x)(2\cdot x+2)$; $g:\ x\longmapsto(2\cdot x^2+1)\sqrt{x}$

$h:\ x\longmapsto\dfrac{1}{x}\cdot(3-x^2)$; $j:\ x\longmapsto\dfrac{2}{x}\cdot\sqrt{x}$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u\cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

BY-NC

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :
$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :
$$f' : x \longmapsto 18\cdot x^2 + 24\cdot x + 6 \quad ; \quad g' : x \longmapsto \frac{10\cdot x^2+1}{2\sqrt{x}}$$
$$h' : x \longmapsto \frac{-x^2-3}{x^2} \quad ; \quad j' : x \longmapsto -\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}$$

Correction 10

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u\cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$	$3\cdot x^2+3x$	$2\cdot x+2$	$6\cdot x+3$	2
$g(x)$	$2\cdot x^2+1$	$\sqrt{x}$	$4x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$h(x)$	$\frac{1}{x}$	$3-x^2$	$-\frac{1}{x^2}$	$-2x$
$j(x)$	$\frac{2}{x}$	$\sqrt{x}$	$-\frac{2}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. a. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= (6\cdot x+3)(2\cdot x+2) + (3\cdot x^2+3\cdot x)\times 2 \\ &= 12\cdot x^2+12\cdot x+6\cdot x+6+6\cdot x^2+6\cdot x \\ &= 18\cdot x^2+24\cdot x+6 \end{aligned}$$

b. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= 4\cdot x\sqrt{x} + (2\cdot x^2+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \\ &= \frac{4\cdot x\cdot\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2\cdot x^2+1}{2\cdot\sqrt{x}} \\ &= \frac{8\cdot x^2+(2\cdot x^2+1)}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{10\cdot x^2+1}{2\cdot\sqrt{x}} \end{aligned}$$

c. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= -\frac{1}{x^2}\cdot(3-x^2) + \frac{1}{x}\cdot(-2x) = \frac{-(3-x^2)}{x^2} - 2 \\ &= \frac{-3+x^2}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} = \frac{-3+x^2-2\cdot x^2}{x^2} = \frac{-x^2-3}{x^2} \end{aligned}$$

d. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$\begin{aligned} j'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= -\frac{2}{x^2}\cdot\sqrt{x} + \frac{2}{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x^2\cdot\sqrt{x}} + \frac{x}{x^2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-2\cdot x+x}{x^2\cdot\sqrt{x}} = \frac{-x}{x^2\cdot\sqrt{x}} = \frac{-1}{x\cdot\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Exercice 11

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :
$$f : x \longmapsto \frac{3-2\cdot x}{x+1} \quad ; \quad g : x \longmapsto \frac{x^2+4\cdot x-1}{2\cdot x-1}$$
$$h : x \longmapsto \frac{3}{2-x} \quad ; \quad j : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $\frac{u}{v}$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier le numérateur et le dénominateur de ce quotient et leurs dérivées respectives.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :
$$f' : x \longmapsto -\frac{5}{(x+1)^2} \quad ; \quad g' : x \longmapsto \frac{2\cdot x^2-2\cdot x-2}{(2\cdot x-1)^2}$$
$$h' : x \longmapsto \frac{3}{(x-2)^2} \quad ; \quad j' : x \longmapsto \frac{1-x}{2\cdot(x+1)^2\cdot\sqrt{x}}$$

Correction 11

1. Par identification du numérateur et dénominateur de chaque quotient, voici le tableau complété :

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$	$3-2\cdot x$	$x+1$	-2	1
$g(x)$	$x^2+4\cdot x-1$	$2\cdot x-1$	$2\cdot x+4$	2
$h(x)$	3	$2-x$	0	-1
$j(x)$	$\sqrt{x}$	$x+1$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	1

 CC BY-NC

2. a. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{-2\cdot(x+1)-(3-2\cdot x)\times 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-2\cdot x-2-3+2\cdot x}{(x+1)^2}=\frac{-5}{(x+1)^2}$$

b. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$=\frac{(2\cdot x+4)(2x-1)-(x^2+4\cdot x-1)\times 2}{(2\cdot x-1)^2}$$
$$=\frac{(4\cdot x^2-2x+8\cdot x-4)-(2\cdot x^2+8\cdot x-2)}{(2\cdot x-1)^2}$$
$$=\frac{4\cdot x^2-2\cdot x+8\cdot x-4-2\cdot x^2-8\cdot x+2}{(2\cdot x-1)^2}=\frac{2\cdot x^2-2\cdot x-2}{(2\cdot x-1)^2}$$

c. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :

$$h'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{0\times(2-x)-3\times(-1)}{(2-x)^2}$$
$$=\frac{3}{(2-x)^2}$$

d. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction j' :

$$j'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1)-\sqrt{x}\times 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}=\frac{\dfrac{x+1-2\cdot x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}=\frac{\dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-x+1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-x+1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$$

Exercice 12

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f : x \longmapsto x-\dfrac{1}{x}$ **2.** $g : x \longmapsto 2\cdot\sqrt{x}$

3. $h : x \longmapsto \dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}$ **4.** $j : x \longmapsto 2\cdot x^3+\dfrac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

Correction 12

1. La dérivée de la fonction f a pour expression :

$$f'(x)=1-\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)=1+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$$

2. La fonction g admet pour expression :

$$g(x)=2\cdot\sqrt{x}=2\times\sqrt{x}$$

Ainsi, sa dérivée g' admet pour expression :

$$g'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

3. La fonction h admet pour expression :

$$h(x)=\frac{3}{x}-2\cdot\sqrt{x}=3\times\frac{1}{x}-2\times\sqrt{x}$$

Ainsi, sa dérivée h' admet pour expression :

$$h'(x)=3\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)-2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$=-\frac{3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}-\frac{x^2}{x^2\sqrt{x}}=\frac{-3\sqrt{x}-x^2}{x^2\sqrt{x}}=-\frac{3\sqrt{x}+x^2}{x^2\sqrt{x}}$$

4. La fonction j admet pour expression :

$$j(x)=2\cdot x^3+\frac{2}{x}=2\times x^3+2\times\frac{1}{x}$$

Ainsi, sa dérivée j' admet pour expression :

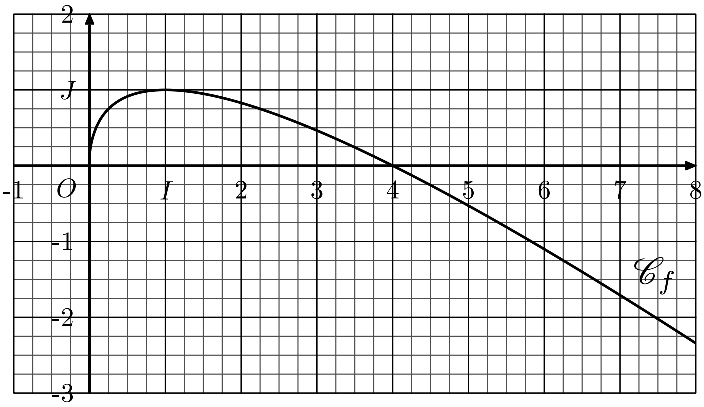
$$j'(x)=2\times(3x^2)+2\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)=6\cdot x^2-\frac{2}{x^2}$$
$$=\frac{6\cdot x^4}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{6\cdot x^4-2}{x^2}$$

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x)=-x+2\sqrt{x}$$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. a. Montrer que la fonction f admet pour dérivée, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f' dont l'expression est donnée par :

$$f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

b. Déterminer la valeur des nombres dérivées de la fonction f en $\dfrac{1}{4}$ et en 4.

2. On note (d) et (Δ) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse respectifs $\dfrac{1}{4}$ et 4.

a. Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ).

b. Montrer que les deux droites (d) et (Δ) s'interceptent au point de coordonnées $\Big(1\,;\dfrac{3}{2}\Big)$.

c. Tracer sur le graphique les droites (d) et (Δ).

Correction 13

1. a. La fonction f admet pour expression :

 BY-NC

$$f(x) = -x + 2\sqrt{x} = (-1){\times}x + 2{\times}\sqrt{x}$$

La fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = (-1){\times}1 + 2{\times}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

b. Les deux nombres dérivés demandés ont pour valeur :

- $f'\Big(\frac{1}{4}\Big) = \dfrac{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
- $f'(4) = \dfrac{1-\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \dfrac{1-2}{2} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

2. a. • Equation réduite de (d) :

$$f\Big(\frac{1}{4}\Big) = -\frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} + 2{\times}\frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

Ainsi, la tangente (d) a pour équation :

$$y = f'\Big(\frac{1}{4}\Big){\cdot}\Big(x - \frac{1}{4}\Big) + f\Big(\frac{1}{4}\Big)$$
$$y = 1{\cdot}\Big(x - \frac{1}{4}\Big) + \frac{3}{4}$$
$$y = x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$
$$y = x + \frac{2}{4}$$
$$y = x + \frac{1}{2}$$

• Equation réduite de (Δ) :

$$f(4) = -4 + 2\sqrt{4} = -4 + 2{\times}2 = -4 + 4 = 0$$

La tangente (Δ) a pour équation :

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$
$$y = f'(4)(x-4) + 0$$
$$y = -\frac{1}{2}(x-4)$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

b. Résolvons l'équation suivante :

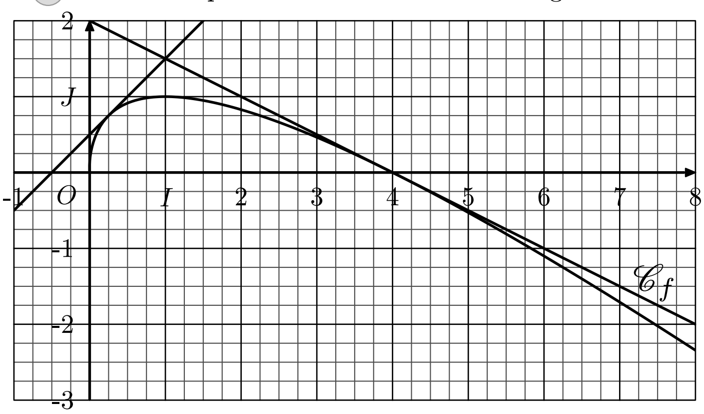
$$x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + 2$$
$$x + \frac{1}{2}x = 2 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{3}{2}{\times}\frac{2}{3}$$
$$x = 1$$

Le point d'intersection des deux tangentes (d) et (Δ) s'interceptent au point d'abscisse 1 dont l'ordonnée vaut :

$$y = -\frac{1}{2}{\times}1 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

Ce point d'intersection a pour coordonnées : $\Big(1\,;\frac{3}{2}\Big)$.

c. Voici les représentations de ces deux tangentes :

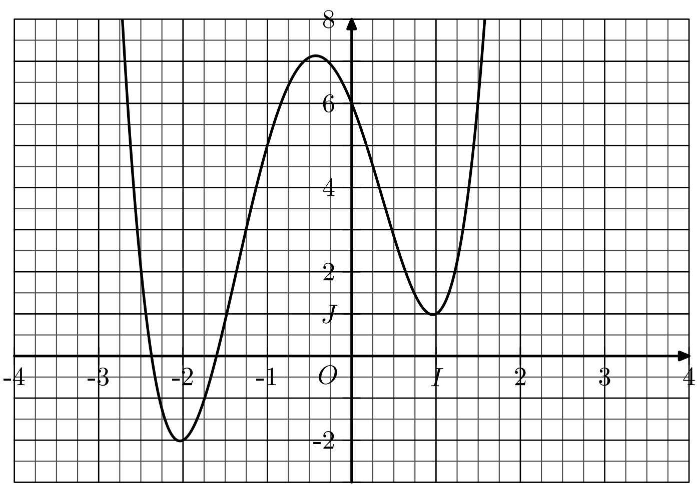


Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{3}{2}{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^3 - \frac{9}{2}{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x + 6$$

On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:



La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'équation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

Toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction 14

Déterminons l'expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{3}{2}\big(4{\cdot}x^3\big) + 3{\cdot}\big(3{\cdot}x^2\big) - \frac{9}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}x\big) - 5$$
$$= 6{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x - 5$$

Essayons de résoudr l'équation :

$$f'(x) = 1$$
$$6{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x - 5 = 1$$
$$6{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x - 5 - 1 = 0$$
$$6{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x - 6 = 0$$

En remarquant que 1 est une solution de cette équation, on en déduit la factorisation suivante :

$$6{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x - 6 = (x-1)\big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big)$$

Développons le membre de gauche :

 BY-NC

$$(x-1)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$$
$$= a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x-a{\cdot}x^2-b{\cdot}x-c$$
$$= a{\cdot}x^3+\big(b-a\big){\cdot}x^2+\big(c-b\big){\cdot}x-c$$

Par identification, des deux membres de l'égalité précédente, on obtient le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} a = 6 \\ b-a = 9 \\ c-b = -9 \\ -c = -6 \end{cases}$$

On en déduit facilement les valeurs :

$a=6$; $b=15$; $c=6$

Ainsi, l'équation devient :

$$f'(x)=1$$
$$6{\cdot}x^3+9{\cdot}x^2-9{\cdot}x-6=0$$
$$\big(x-1\big)\big(6{\cdot}x^2+15{\cdot}x+6\big)=0$$

Etudions le second facteur du membre de droite. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=15^2-4{\times}6{\times}6=225-144=81$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$

Le discriminant étant strictement positif, ce facteur admet les deux racines suivantes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\dfrac{-15-9}{2{\times}6}=\dfrac{-24}{12}=-2$	$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\dfrac{-15+9}{2{\times}6}=\dfrac{-6}{12}=-\dfrac{1}{2}$

Ainsi, l'équation $f'(x)=1$ admet pour solution l'ensemble :

$$\mathcal{S}=\Big\{-2\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,1\Big\}$$

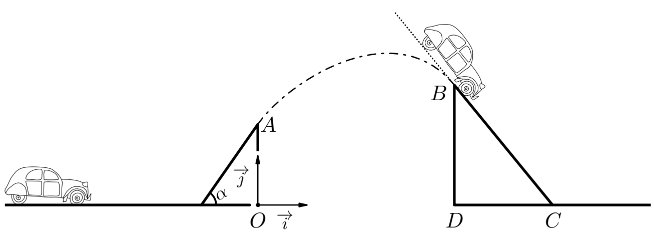
Déterminons l'équation réduite de la tangente associée à chacune de ces valeurs :

- $x=-2$:
  On a la valeur suivante :
  $$f(-2)=\frac{3}{2}{\times}(-2)^4+3{\times}(-2)^3-\frac{9}{2}{\times}(-2)^2-5{\times}(-2)+6$$
  $$=\frac{3}{2}{\times}16-3{\times}8-\frac{9}{2}{\times}4+5{\times}2+6$$
  $$=24-24-18+10+6=-2$$
  Ainsi, au point d'abscisse -2, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour expression :
  $$y=f'(-2){\cdot}\big[x-(-2)\big]+f(-2)$$
  $$y=1{\cdot}(x+2)+(-2)$$
  $$y=x$$
- $x=-\dfrac{1}{2}$:
  On a la valeur suivante :
  $$f\Big(-\frac{1}{2}\Big)=\frac{3}{2}{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^4+3{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^3-\frac{9}{2}{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2-5{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)+6$$
  $$=\frac{3}{2}{\times}\frac{1}{16}-3{\times}\frac{1}{8}-\frac{9}{2}{\times}\frac{1}{4}+5{\times}\frac{1}{2}+6$$
  $$=\frac{3}{32}-\frac{3}{8}-\frac{9}{8}+\frac{5}{2}+6=\frac{3}{32}-\frac{9}{32}-\frac{36}{32}+\frac{80}{32}+\frac{196}{32}$$
  $$=\frac{3-9-36+80+196}{32}=\frac{234}{32}$$
  Ainsi, au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour expression :
  $$y=f'\Big(-\frac{1}{2}\Big){\cdot}\Big[x-\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big]+f\Big(-\frac{1}{2}\Big)$$
  $$y=1{\cdot}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)+\frac{234}{32}$$
  $$y=x+\frac{1}{2}+\frac{234}{32}$$
  $$y=x+\frac{16}{32}+\frac{234}{32}$$
  $$y=x+\frac{250}{32}$$
- $x=1$:
  On a la valeur suivante :
  $$f(1)=\frac{3}{2}{\times}1^4+3{\times}1^3-\frac{9}{2}{\times}1^2-5{\times}1+6$$
  $$=\frac{3}{2}-3-\frac{9}{2}-5+6=\frac{3}{2}-\frac{6}{2}-\frac{9}{2}-\frac{10}{2}+\frac{12}{2}$$
  $$=\frac{3-6-9-10+12}{2}=\frac{3-6-9-10+12}{2}=1$$
  Ainsi, au point d'abscisse 1, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour expression :
  $$y=f'(1){\cdot}\big(x-1\big)+f(1)$$
  $$y=1{\cdot}(x-1)+1$$
  $$y=x$$

On vient de montrer que la première bissectrice est une tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -2 et 1.

Exercice 15

Joe le cascadeur et sa "*2CV*" doivent réaliser un saut représenté ci-dessous pour un tournage.



Il peut choisir sa vitesse et l'angle d'inclinaison du tremplin de départ, mais pour optimiser sa réception, il souhaite atterir sur le tremplin d'arrivée avec la même inclinaison que celui-ci.

Pour préparer son saut, il fait un repérage sur les lieux de productions *(avec un repère $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\big)$ orthonomé représenté sur la représentation)* et obtient les données suivantes :

- Le point A est à une hauteur de $1\,m$ du sol.
- Les deux tremplins sont écartés de $9\,m$.
- Le point B est à une hauteur de $4\,m$.
- La pente du tremplin de réception a une longueur de $5\,m$.

Utilisant ses connaissances de 1^oS, il modélise sa trajectoire par la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f du second degré. On notera cette fonction :

$$f(x)=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$$

Toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction 15

(cc) BY-NC

- Le point A a pour coordonnées $A(0\,;3)$. Ainsi, l'expression de la fonction f doit vérifier :

$$f(0)=1$$
$$a{\cdot}0^2+b{\cdot}0+c=1$$
$$c=1$$

Ainsi, l'expression de la fonction f est sous la forme :
$f(x)=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+1$

- Le point B a pour coordonnées $B(9\,;4)$. Ainsi, l'expression de la fonction f vérifie :

$$f(9)=4$$
$$a{\cdot}9^2+b{\cdot}9+1=4$$
$$81{\cdot}a+9{\cdot}b=4-1$$
$$81{\cdot}a+9{\cdot}b=3$$

- Déterminons l'abscisse du point C. Le triangle BCD est un triangle rectangle en D.

D'après le théorème de Pythagore, on a la relation :

$$BC^2=DC^2+BD^2$$
$$5^2=DC^2+4^2$$
$$25=DC^2+16$$
$$DC^2=25-16$$
$$DC^2=9$$
$$DC=\sqrt{9}$$
$$DC=3\,m$$

Le point C a pour coordonnées : $C(12\,;0)$

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 9 a pour valeur :

$$\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{0-4}{12-9}=-\frac{4}{3}$$

Ainsi, la fonction f doit vérifier la relation :

$$f'(9)=-\frac{4}{3}$$
$$2a\times9+b=-\frac{4}{3}$$
$$18{\cdot}a+b=-\frac{4}{3}$$

Ainsi, les nombres a et b vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases}81{\cdot}a+9{\cdot}b=3\\18{\cdot}a+b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}81{\cdot}a+9{\cdot}b=3\\162{\cdot}a+9{\cdot}b=-12\end{cases}$$

Par soustraction, membre à membre, de ces deux équations :

$$-81{\cdot}a=15$$
$$a=\frac{15}{-81}$$
$$a=-\frac{5}{27}$$

De la seconde équation, on a :

$$18{\cdot}a+b=-\frac{4}{3}$$
$$18{\cdot}\Big(-\frac{5}{27}\Big)+b=-\frac{4}{3}$$
$$-\frac{10}{3}+b=-\frac{4}{3}$$
$$b=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}$$
$$b=\frac{6}{3}$$
$$b=2$$

Ainsi, la fonction f admet pour expression :

$$f(x)=-\frac{5}{27}{\cdot}x^2+2{\cdot}x+1$$

(cc) BY-NC