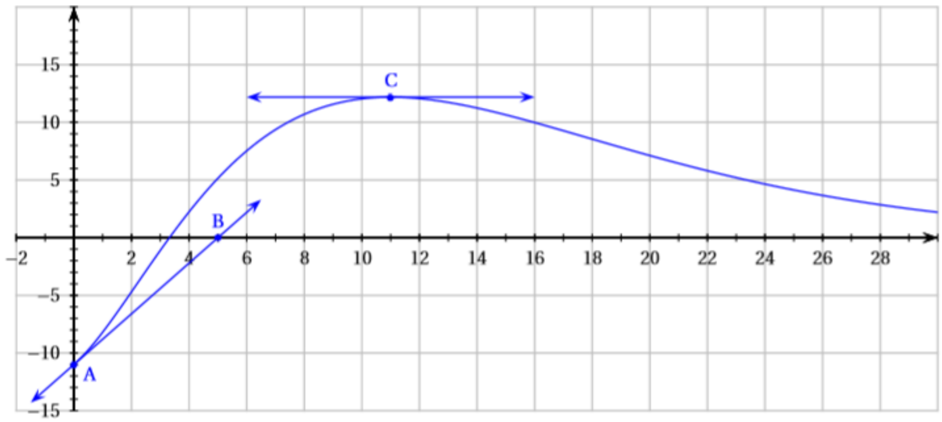
Exercice 1

Dans le repère orthogonal donné ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;30]$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 passe par le point B (5 ; 0).
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 11 est parallèle à l'axe des abscisses.



Dans toute la suite, on note f' la dérivée de la fonction f sur $[0\,;30]$

Partie A – Lectures graphiques

1. Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$.

Partie B – Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;30]$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 11\right) \mathrm{e}^{-0{,}2x}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

	Instruction :	Résultat :
1	$f(x) = (x^2 - 11) * \exp(-0{,}2 * x)$	$\left(x^2 - 11\right) \mathrm{e}^{-0{,}2x}$
2	Dérivée($f(x)$)	$\left(-0{,}2x^2 + 2x + 2{,}2\right) \mathrm{e}^{-0{,}2x}$

1. Pour tout réel $x \in [0\,;30]$, justifier le résultat de l'instruction obtenu en ligne 2 du logiciel.
2. Étudier le signe de f' sur $[0\,;30]$ puis dresser le tableau des variations de f sur $[0\,;30]$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;11]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Corrigé

Partie A : lectures graphiques

1. Le point A a pour coordonnées $A(0\,;\,-11)$ donc $f(0) = -11$.
En utilisant les coordonnées des points A et B, on calcule la pente de la droite (AB) tangente à $\mathscr{C}_f$:
$f'(0) = \dfrac{0-(-11)}{5-0} = \dfrac{11}{5}$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point C est horizontale, donc $f'(11) = 0$.

Partie B : étude d'une fonction

1. En utilisant la formule permettant de dériver un produit de fonctions, et en posant $u(x) = x^2 - 11$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0.2x}$, $u'(x) = 2x$ $v'(x) = -0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}$, on trouve :
$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} + \left(x^2 - 11\right) \times (-0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} = \left(2x - 0{,}2x^2 + 2{,}2\right)\mathrm{e}^{-0{,}2x} = (-0{,}2x^2 + 2x + 2{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}$.
2. $\forall x \in [0\,;\,30]$, $\mathrm{e}^{-0{,}2x} > 0$ donc $f(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $-0{,}2x^2 + 2x + 2{,}2$.
Les deux solutions ($\Delta \geqslant 0$) sont : $x_1 = 11$ et $x_2 = -1$. Cette dernière valeur ne sera pas retenue car ne faisant pas partie de l'intervalle d'étude.
$f(0) = (0^2 - 11)\,\mathrm{e}^{0} = -11 < 0$
$f(11) = (11^2 - 11)\,\mathrm{e}^{-0{,}2\times 11} = 110\,\mathrm{e}^{-2{,}2} > 0$
$f(30) = (30^2 - 11)\,\mathrm{e}^{-2{,}2\times 30} = 889\,\mathrm{e}^{-6} > 0$.
Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ est :

x	0		11		30
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-11	$\nearrow$	$110\,\mathrm{e}^{-2{,}2}$	$\searrow$	$889\,\mathrm{e}^{-6}$

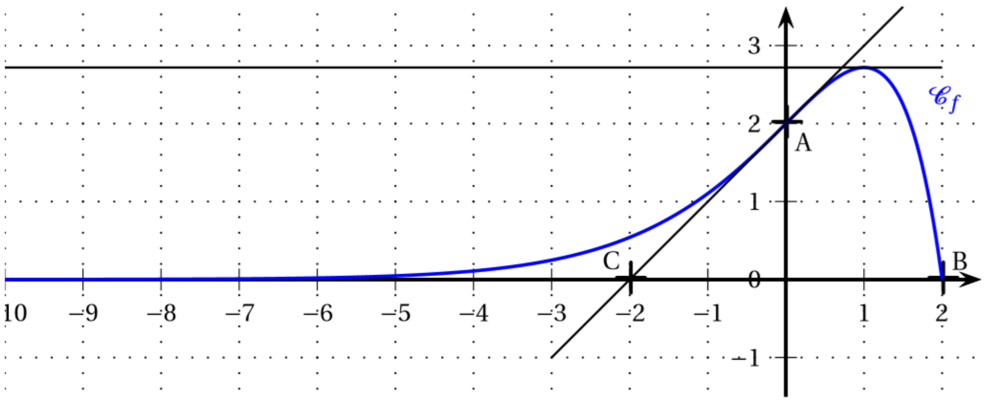
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0{,}2x} > 0$ donc $\left(x^2 - 11\right)\mathrm{e}^{-0{,}2x} = 0 \iff x^2 - 11 = 0 \iff x = -\sqrt{11}$ ou $x = \sqrt{11}$.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique $\alpha = \sqrt{11} \approx 3{,}32$ sur $[0\,;\,11]$.

Exercice 2

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$. On a placé les points $\mathrm{A}(0\,;2)$, $\mathrm{B}(2\,;0)$ et $\mathrm{C}(-2\,;\,0)$.
On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10\,;\,2]$.
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.
On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{x}.$$

.

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$.
   b. En déduire la valeur de $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$.

Corrigé

Partie A

1. $f(0) = 2$ (point $A(0;2)$) et $f(2) = 0$ (point $B(2;0)$).
2. Au point d'abscisse la tangente à $(C)_f$ est horizontale donc $f'(1) = 0$.

3. La tangente à $(C)_f$ est la droite (AC). Son équation est de la forme : $y = mx + p$.
   $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{-2-0} = 1$ et $p = y_A - m \times x_A = 2 - 1 \times 0 = 2$.
   L'équation de la tangente à $(C)_f$ au point A a pour équation : $y = x + 2$.
4. À l'aide du graphique, on peut affirmer que sur l'intervalle $[-10; 2]$ l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions distinctes l'une positive, l'autre négative.
5. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-10; 1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

Partie B

1. $f(0) = (2-0)\,\mathrm{e}^{0} = 2$ et $f(2) = (2-2)\,\mathrm{e}^{2} = 0$
2. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[-10; 2]$. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, et en posant $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$,
   $\forall x \in [-10; 2]$, $f'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{x} + (2-x) \times \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \times (-1 + 2 - x) = \mathrm{e}^{x}(-x+1) = (-x+1)\,\mathrm{e}^{x}$
   b. $f'(1) = (-1+1)\,\mathrm{e}^{1} = 0$
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
   Or $f'(0) = (-0+1)\,\mathrm{e}^{0} = 1$ et $f(0) = (2-0)\,\mathrm{e}^{0} = 2$ donc l'équation de la tangente est $y = 1 \times (x-0) + 2 = x + 2$
4. **a.** $\forall x \in [-10; 2]$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x+1$
   Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$ est :

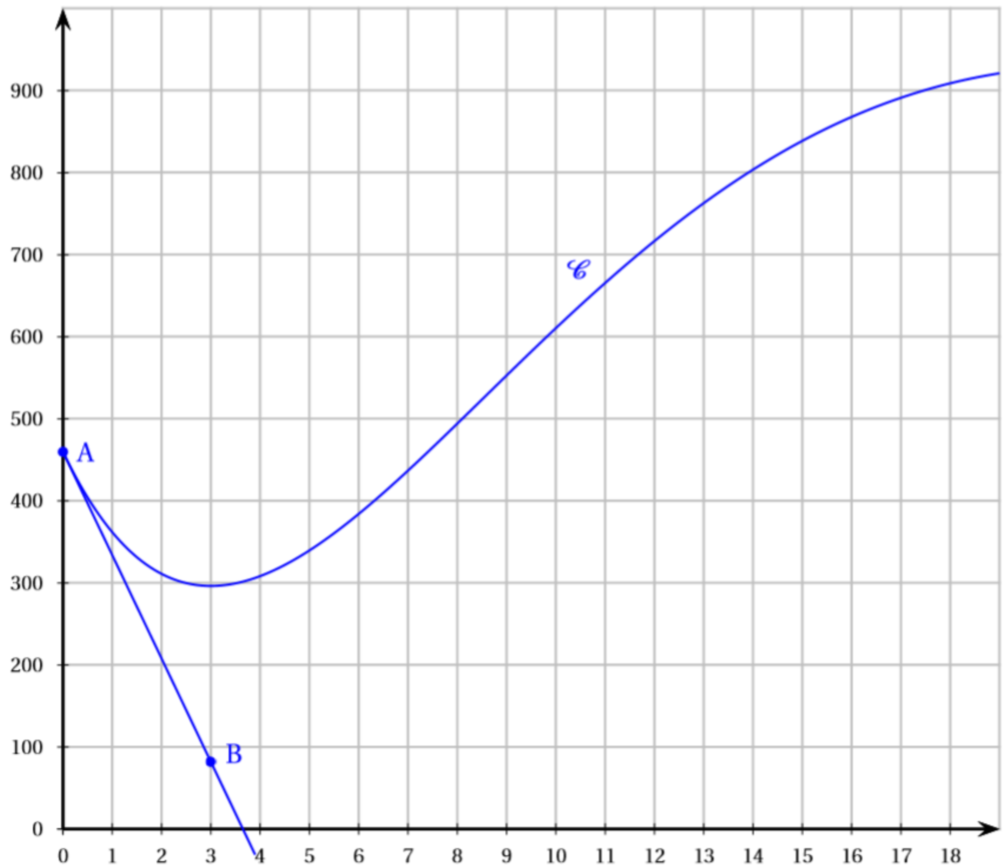
x	-10		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$12\,\mathrm{e}^{-10}$	↗	e	↘	0

$f(-10) = 12\,\mathrm{e}^{-10} \approx 0{,}0005$ $\qquad f(1) = (2-1)\,\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e} \approx 2{,}72$ $\qquad f(2) = 0$

Exercice 3

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0;\ 19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.

2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A $(0\,;\ 460)$ et B $(3\,;\ 82)$, est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par $(\mathscr{C})$?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.
On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ par :

$$f(x) = \left(20x^2 - 80x + 460\right)\text{e}^{-0,1x}$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,29]$.
   a. Démontrer que f' est définie par :

$$f'(x) = \left(-2x^2 + 48x - 126\right)\text{e}^{-0,1x}.$$

   b. On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.
   Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	Résultat :
Solve$(-2x^2+48x-126=0)$	3 et 21

Retrouver ce résultat par le calcul.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\,;29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

d. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

Corrigé

Partie A

1. De 2000 à 2003, l'audience a baissé de 460 000 à 300 000 téléspectateurs, puis de 2003 à 2019 a régulièrement progressé à plus de 900 000 téléspectateurs.

2. On lit en 2014 environ 800 000 téléspectateurs.

3. $f'(0)$ nombre dérivé de la fonction en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB), soit :
$f'(0)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{82-460}{3-0}=\dfrac{-378}{3}=-126.$

Partie B

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;29]$.

a. f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;29]$ et sur cet intervalle :
$$f'(x)=(2\times 20x-80)\mathrm{e}^{-0,1x}+\left(20x^2-80x+460\right)(-0,1)\mathrm{e}^{-0,1x}$$
$$=\left(40x-80-2x^2+8x-46\right)\mathrm{e}^{-0,1x}=\left(-2x^2+48x-126\right)\mathrm{e}^{-0,1x}.$$
Rem. On peut vérifier que $f'(0)=-126$ (cf. question **3.** de la partie A.)

b. On considère l'équation : $-2x^2+48x-126=0$.
$-2x^2+48x-126=0 \iff -x^2+24x-63=0$.
Pour ce trinôme :
$\Delta=24^2-4\times(-1)\times(-63)=576-252=324=4\times 81=2^2\times 9^2=(2\times 9)^2=18^2$.
$\Delta>0$, donc l'équation du second degré a deux solutions :
$$x_1=\frac{-24+18}{2\times(-1)}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-24-18}{2\times(-1)}=21.$$

c. On sait que le trinôme est du signe de $a=-1$ donc négatif sauf sur $[3\,;21]$, où $f(x)\geqslant 0$.
La fonction est donc décroissante sauf sur l'intervalle $[3\,;21]$ où elle est croissante.
On a $f(0)=460$; $f(3)\approx 296$; $f(21)\approx 931$ et $f(29)\approx 826$. D'où le tableau de variations :

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	460	$\searrow$	296	$\nearrow$	931	$\searrow$	826

d. Le tableau de variations de la fonction f montre que le maximum de téléspectateurs est de 931 milliers en 2021 ; la barre du million ne sera jamais atteinte entre 2000 et 2029.