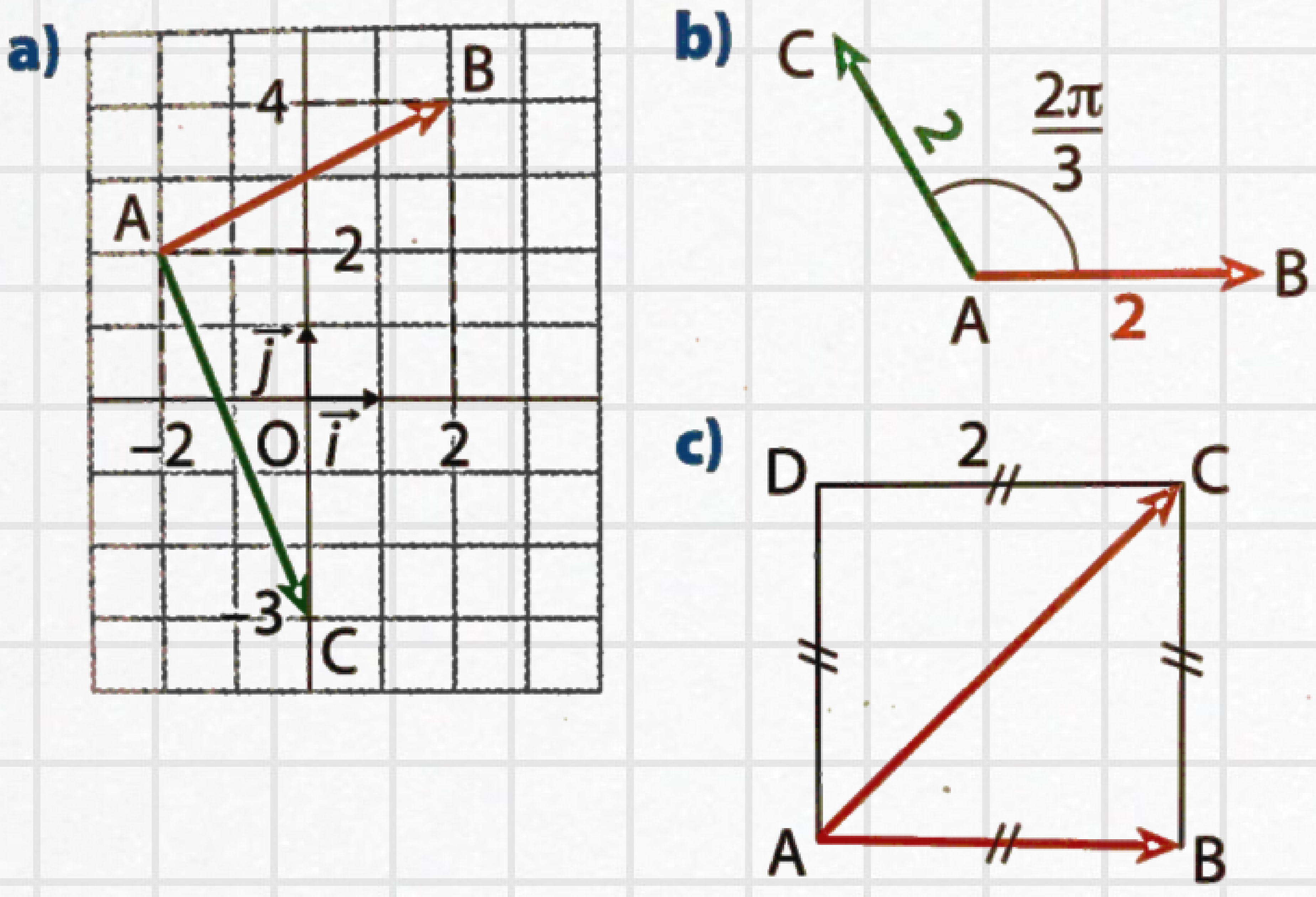
Produit scalaire

1) Calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ dans chacun des cas :



a) Avec les coordonnées

Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x;y)$ coordonnées exprimées dans un repère orthonormé alors
$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$

$\vec{AC}\,(2;-5)$ $\vec{AB}\,(4;2)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2\times4+(-5)\times2 = -2$

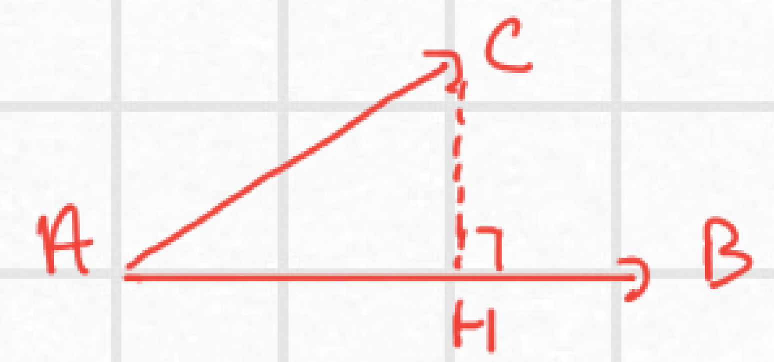
b) Avec la formule du cosinus

Si $\widehat{BAC} = \theta$
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\theta$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$
$= 2\times2\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$= 2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

3) Avec la formule du projeté orthogonal.

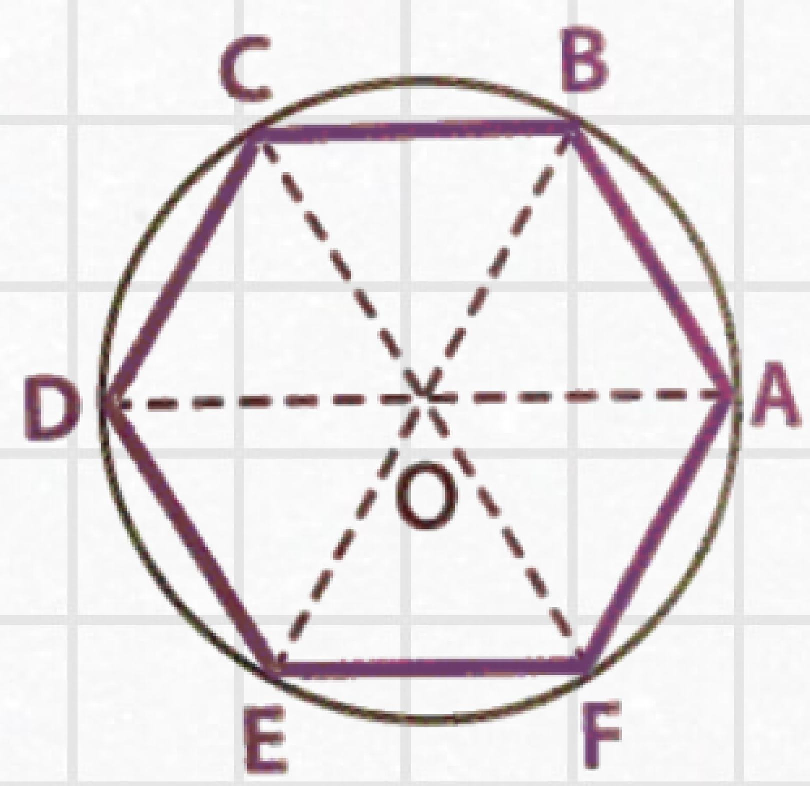
Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AH}$



$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = AB^2 = 4$

2) ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.
Calculez :

a) $\vec{OA}\cdot\vec{OB}$ **b)** $\vec{OA}\cdot\vec{OC}$
c) $\vec{OA}\cdot\vec{BC}$ **d)** $\vec{OA}\cdot\vec{AD}$.



a) $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = OA\times OB\times\cos\frac{\pi}{3}$
$= 1\times1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $\vec{OA}\cdot\vec{OC} = OA\times OC\times\cos\frac{2\pi}{3}$
$= 1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

c) $\vec{OA}\cdot\vec{BC} = \vec{OA}\times\vec{OD} = -OA\times OD$
$= -1$

car $\vec{OA}$ et $\vec{OD}$ sont colinéaires de sens opposés.

d) $\vec{OA} \cdot \vec{AD} = -OA \times AD = -2$ car $\vec{OA}$ et $\vec{OD}$ sont colinéaires de sens opposés.

3) On donne les points $A(-3;2)$, $B(3;0)$ et $C(0;6)$.
Donner une mesure à 1° près de l'angle $\widehat{BAC}$. Faire une figure pour vérifier la cohérence du résultat.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC}$

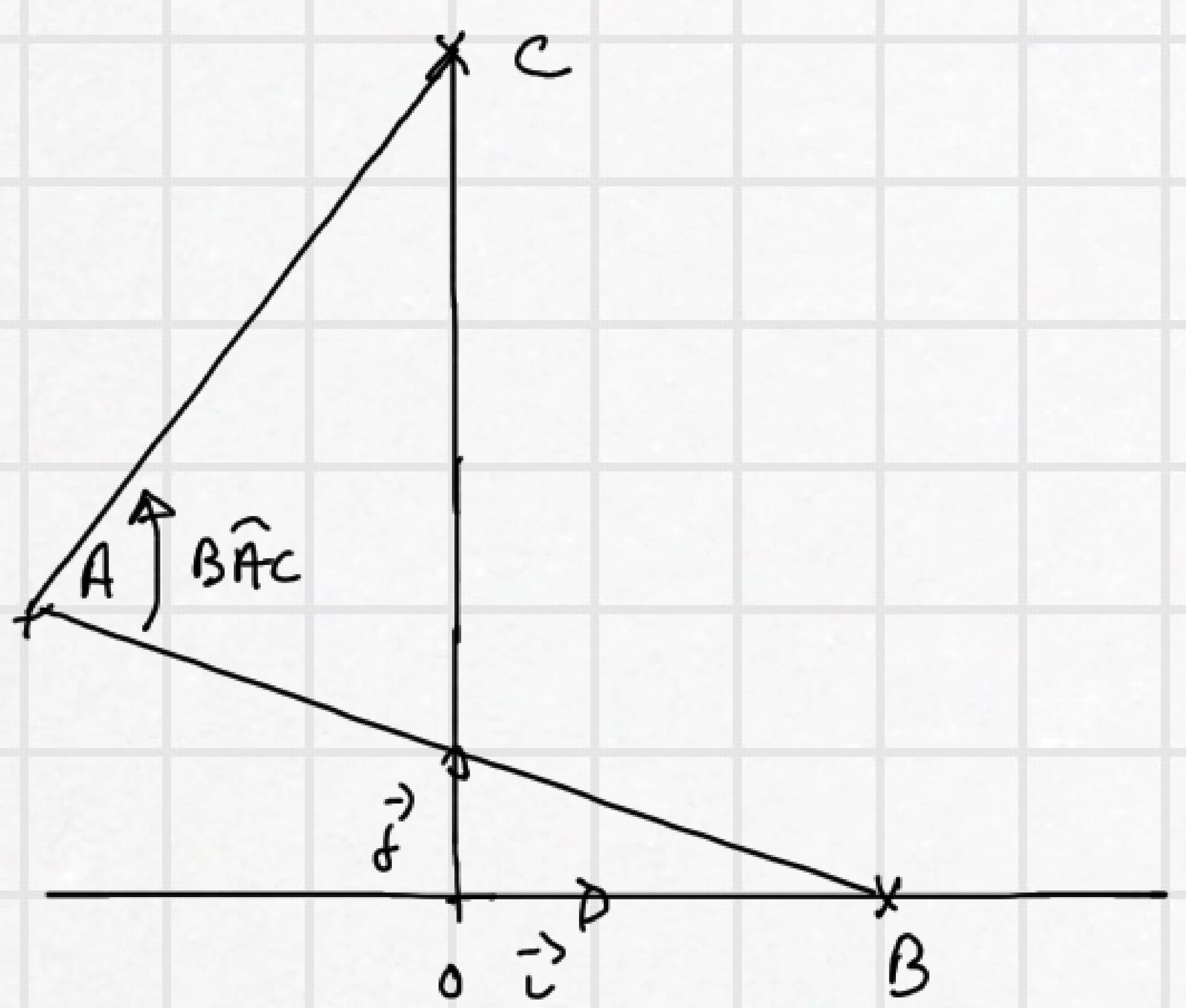
$\vec{AB}(6;-2)$ et $AB = \sqrt{6^2+(-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\vec{AC}(3;4)$ et $AC = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6\times 3 + (-2)\times 4 = 10$

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{10}{2\sqrt{10}\times 5} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

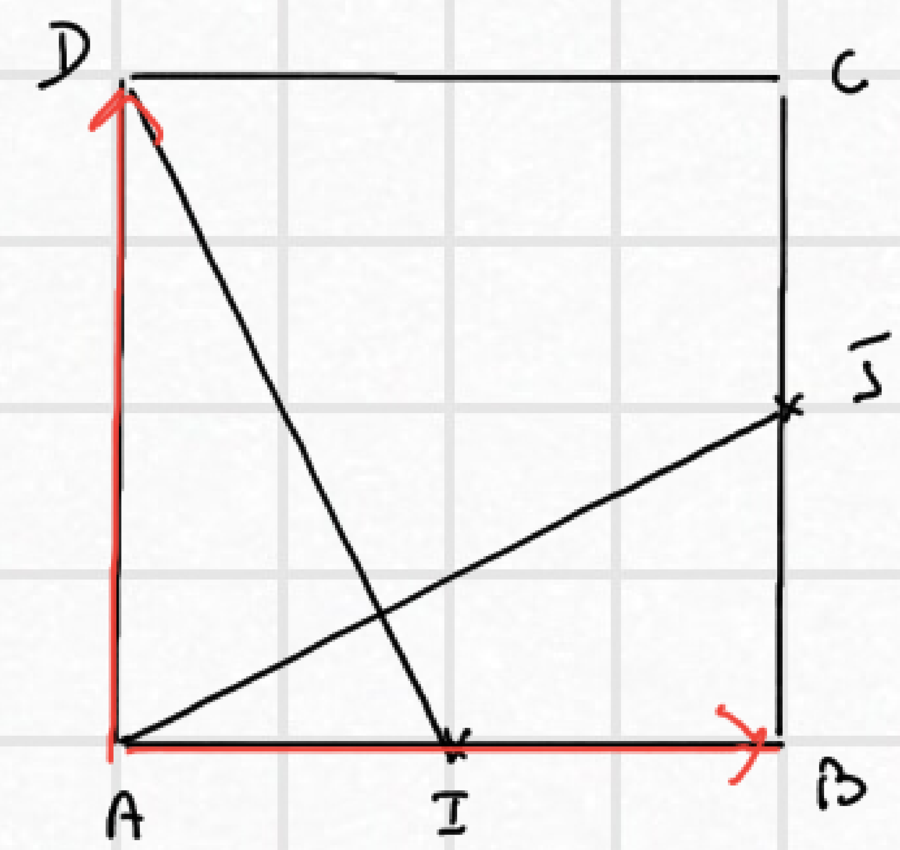
$\widehat{BAC} = A\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) \simeq 71{,}56°$



4) ABCD est un carré de côté 1. I et J sont les milieux respectifs [AB] et [CD]. Montrer que $(AJ) \perp (ID)$ de deux façons différentes

a) Avec les coordonnées dans un repère bien choisi.

b) En décomposant les vecteurs $\vec{AJ}$ et $\vec{ID}$.



a) On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{AB}; \vec{AD})$.

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $C(1;1)$ $D(0;1)$

$I\left(\frac{1}{2};0\right)$ $J\left(1;\frac{1}{2}\right)$

$\vec{AJ}\left(1;\frac{1}{2}\right)$ $\vec{DI}\left(\frac{1}{2};-1\right)$

$\vec{AJ} \cdot \vec{DI} = 1\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)(-1) = 0$

donc $(AJ) \perp (DI)$

b) $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{BJ} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$

$\vec{DI} = \vec{DA} + \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AD}$

$\vec{AJ} \cdot \vec{DI} = \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AD}\right)$

$= \frac{1}{2}AB^2 - \underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}_{0} - \frac{1}{2}AD^2$

car $\vec{AB} \perp \vec{AD}$

$= \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AD^2 = \frac{1}{2}\times 1^2 - \frac{1}{2}\times 1^2 = 0$

5) Dans la configuration de l'exercice précédent, déterminer une valeur approchée à 1° près de l'angle $\widehat{DIC}$.

Dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$

$I\left(\frac{1}{2}; 0\right) \quad C(1; 1) \quad D(0; 1)$

$\vec{IC}\left(\frac{1}{2}; 1\right) \quad \vec{ID}\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

$IC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = ID$

$\vec{IC} \cdot \vec{ID} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\vec{IC} \cdot \vec{ID} = IC \times ID \times \cos \widehat{DIC}$

donc $\cos \widehat{DIC} = \dfrac{\vec{IC} \cdot \vec{ID}}{IC \cdot ID}$

$\cos \widehat{DIC} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times 2}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$

$\widehat{DIC} = A\cos\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$

$\underline{\widehat{DIC} \simeq 47,87°}$ (Ce n'est pas 45° !)

6) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sachant que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(4^2 - 2^2 - 3^2\right) = \frac{1}{2}(16 - 4 - 9)$

$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{2}}$

7) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$

Calculer :

a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ b) $2\vec{u} \cdot (-3\vec{v})$ c) $(\vec{u} + \vec{v})^2$

a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}$
$= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$
$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$
$= 3^2 + 12 = 21$

b) $2\vec{u} \cdot (-3\vec{v}) = 2 \times (-3)\, \vec{u} \cdot \vec{v} = -6\, \vec{u} \cdot \vec{v}$
$= -6 \times 12 = -72$

c) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 12^2 = 144$

8) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$.

Calculer :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{u}^2$ c) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{i} - \vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 5\vec{j})$
$= 6\vec{i}^2 + 10\vec{i} \cdot \vec{j} - 3\vec{j} \cdot \vec{i} - 15\vec{j}^2$

or $\vec{i}^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1 = \vec{j}^2$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

donc $\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 15 = -9}$

9) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 1 et 2.

Calculer $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + 3\vec{v})^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + 3\vec{v})^2 =$

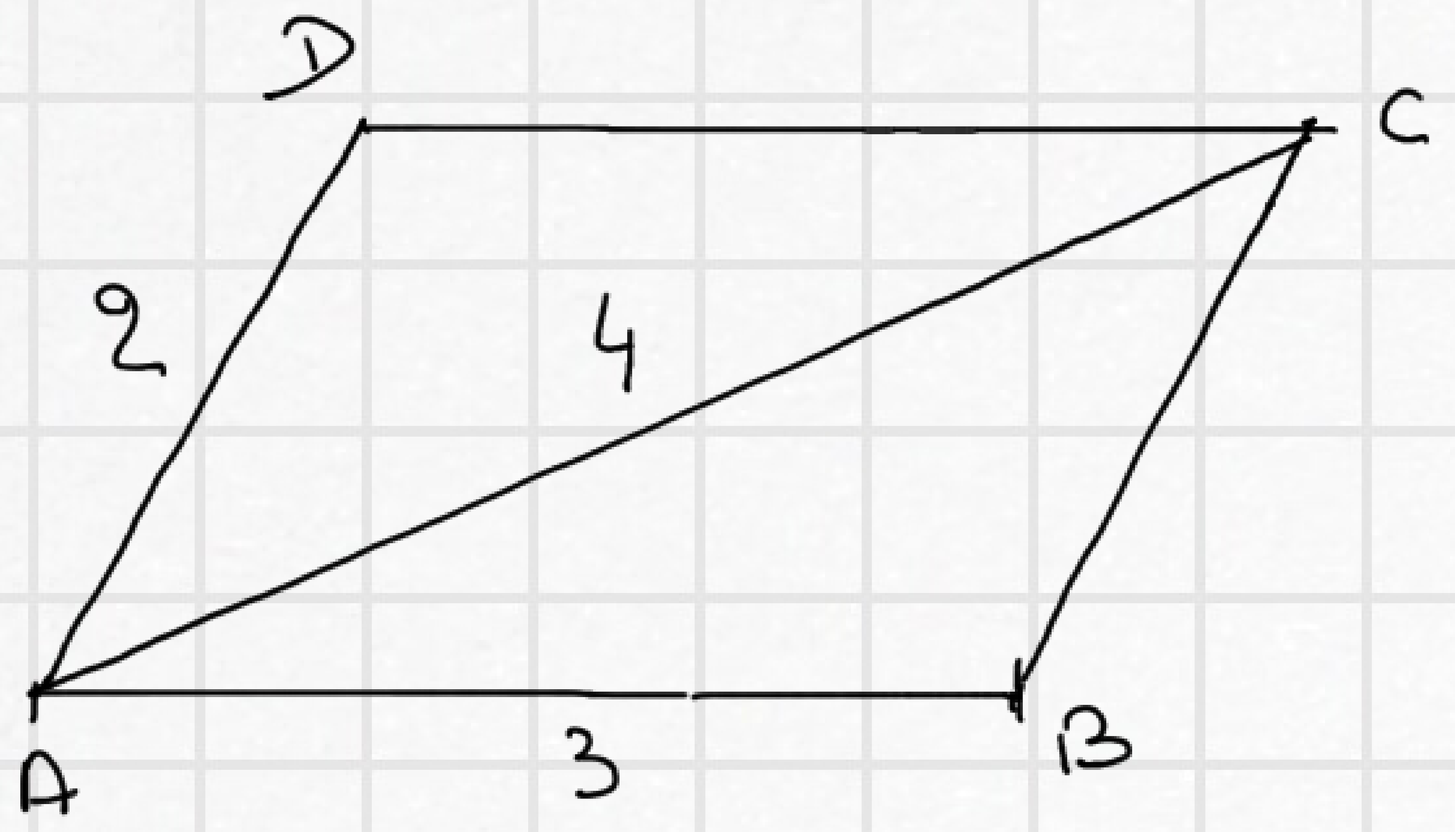
$\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 - (\vec{u}^2 + 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2) =$

$-8\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0 \text{ car } \vec{u} \perp \vec{v}} - 8\vec{v}^2 = -8 \times 0 - 8 \times 4 = -32$

10) ABCD est le parallélogramme ci-après.

On note $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$

Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{2}$, calculer $(\vec{u} - \vec{v})^2$ et en déduire que $DB = \sqrt{10}$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AB}+\vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2\right)$

or $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(4^2 - 2^2 - 3^2\right)$

$= \frac{1}{2}(16 - 4 - 9) = \frac{3}{2}$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{2}$

2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$= 3^2 + 2^2 - \frac{3}{2} \times 2$

$= 9 + 4 - 3 = 10$

or $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ et dans le cas présent $\vec{u} - \vec{v} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{DA}$

$= \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{DB}$

et donc $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{DB}\|^2 = DB^2$

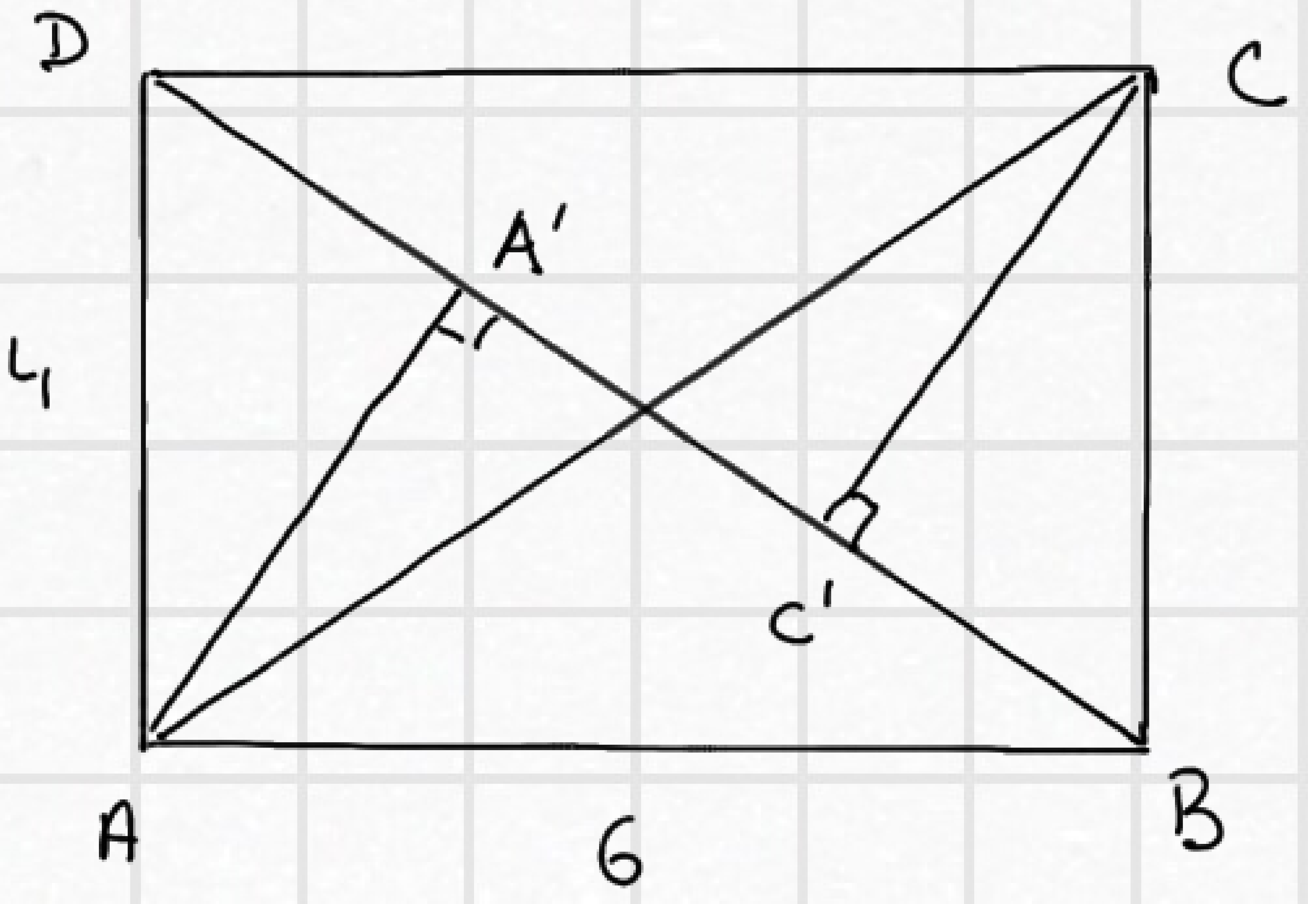
$DB^2 = 10$ donc $DB = \sqrt{10}$

11) ABCD est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. A' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD).

a) Démontrer que $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -20$

b) Justifier que $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{A'C'} \cdot \vec{BD}$

c) Démontrer que $A'C' = \frac{10\sqrt{13}}{13}$



a) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (-\vec{AB} + \vec{AD})$

$= -AB^2 + \underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}_{0} - \underbrace{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}_{0} + AD^2$

$= -36 + 16 = -20$

$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -20$

b) $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AA'} + \vec{A'C'} + \vec{C'C}) \cdot \vec{BD}$

$= \underbrace{\vec{AA'}\cdot\vec{BD}}_{0} + \vec{A'C'}\cdot\vec{BD} + \underbrace{\vec{C'C}\cdot\vec{BD}}_{0} = \vec{A'C'} \cdot \vec{BD}$

c) $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{A'C'} \cdot \vec{BD} = -A'C' \times BD$

car $\vec{A'C'}$ et $\vec{BD}$ sont de sens contraire

$BD = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

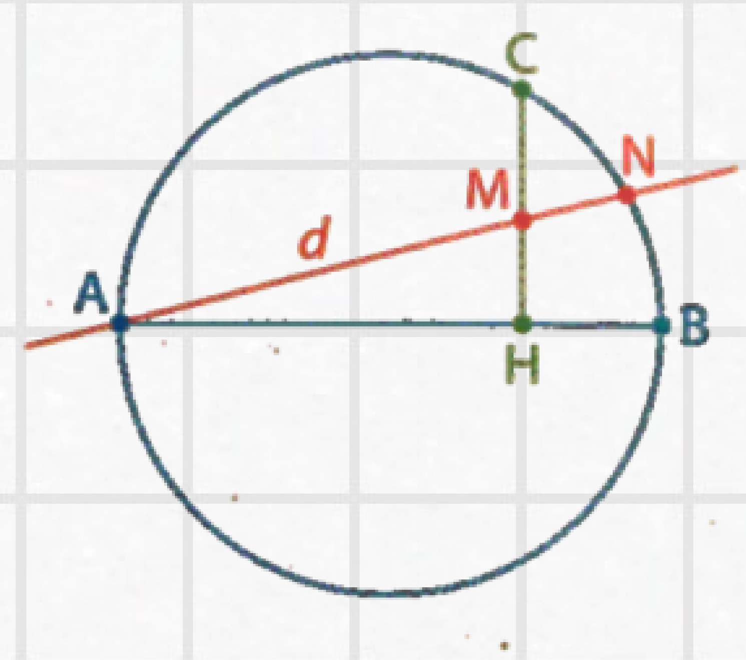
$BD = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{-A'C'} = \frac{-20}{2\sqrt{13}} = -\frac{10}{\sqrt{13}}$

$BD = -\frac{10\sqrt{13}}{13}$

12)

Soit Γ un cercle de diamètre [AB].

Pour tout point C de Γ autre que A et B, on nomme H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et *d* une droite variable passant par A. La droite *d* recoupe le cercle en N et coupe la droite (CH) en M.



a) Quelle est la nature du triangle ABN ?

b) Justifier les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

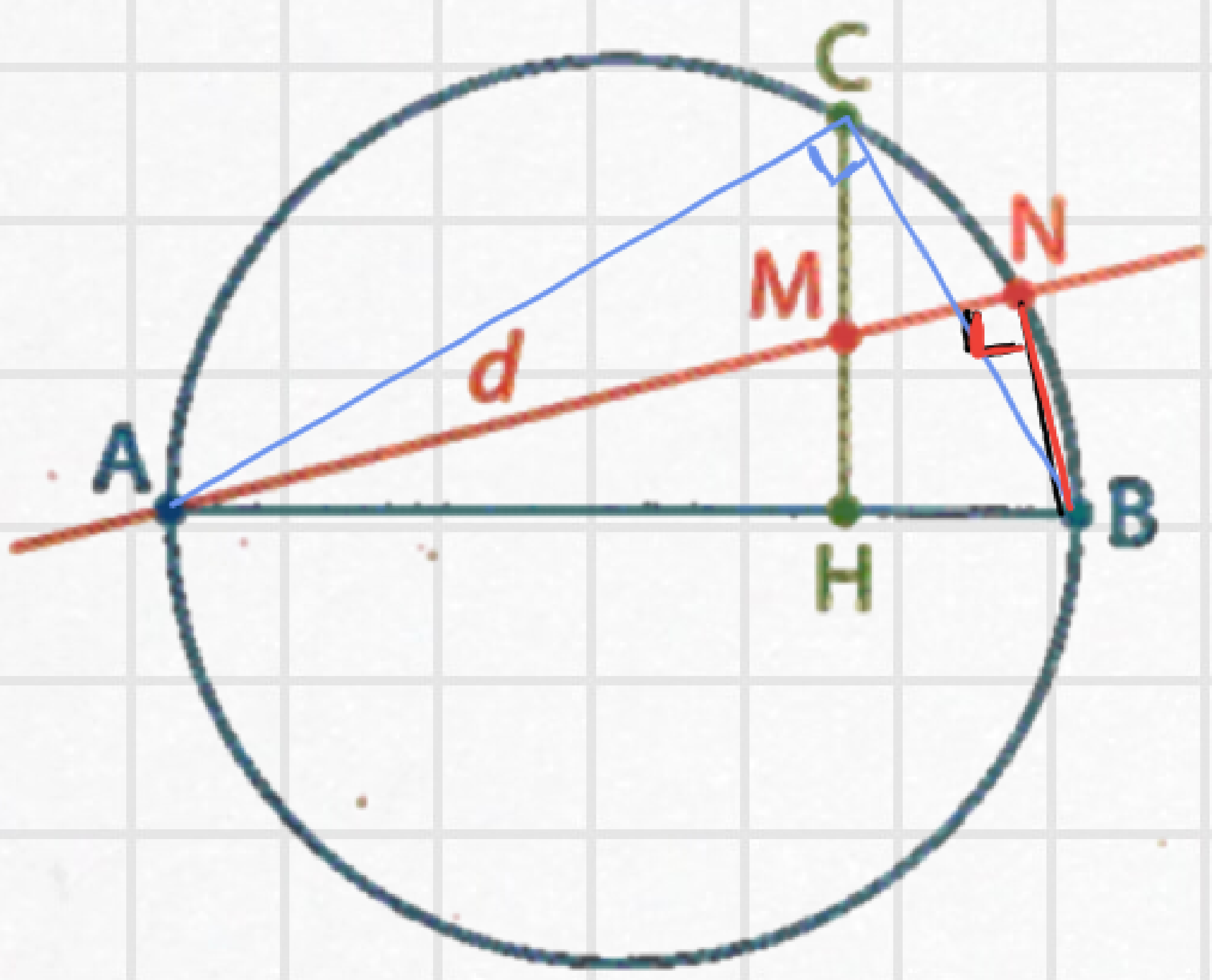
c) Démontrer que $AM \times AN = AC^2$.

---

a) Tout triangle inscrit dans un cercle dont l'un des côtés est son diamètre est rectangle.

Donc le triangle ABN est rectangle en N.

b)



N est le projeté orthogonal de B sur d

donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$

C et M ont même projeté orthogonal H sur (AB)

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

on a bien $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

c) Le triangle ACB est rectangle en C donc C est le projeté orthogonal de B sur (AC) donc :

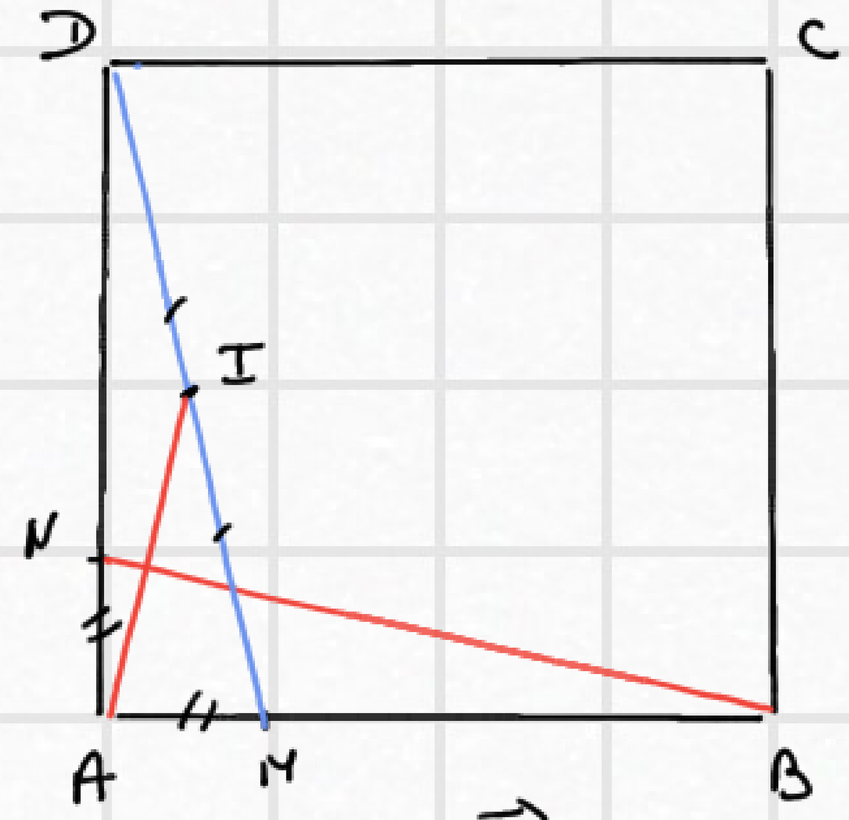
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = AC^2$

on a donc bien $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = AC^2$

Ce produit scalaire est indépendant de M. Il est constant.

13) ABCD est un carré de côté c. M et N sont des points des segments [AB] et [AD] tels que : AM = AN.

Le point I est le milieu du segment [DM]



1a) Prouver que :

$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}$

b) Après avoir décomposé le vecteur $\overrightarrow{BN}$, démontrer que $2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AN}$

2) Déduire que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BN} = 0$ et conclure.

1a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$

$= 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{ID}}_{\vec{0}}$ car I est le milieu de [MD]

b) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$

$2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN})$

$= \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}}_{0} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AN}$

donc $2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AN}$

2) Notons $x = AM = AN$

- $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA} = -AM \times AB = -xc$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AN} = AD \times AN = xc$

donc $2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BN} = 0$

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BN} = 0$

et ainsi $(AI) \perp (BN)$.

14 Ensemble de points.

Soit [AB] un segment de longueur 2 et I le milieu de [AB]. On cherche Γ (se lit "gamma") l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5$

1) Démontrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

2) Démontrer que $M \in \Gamma$ si et seulement si $IM = \sqrt{6}$

3) En déduire l'ensemble Γ

---

1) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$

$= MI^2 + \underbrace{\overrightarrow{MI}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}})}_{0} - \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IB}$

$= MI^2 - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

2) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5$ équivaut à

$MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 5$ avec $AB = 2$

$MI^2 = 5 + \frac{1}{4}\times 4 = 6$

$MI^2 = 6$

$IM = \sqrt{6}$ ($IM = MI$!)

3) Γ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

---

15) Ensemble de points.

Soit [AB] un segment de longueur 3 et I le milieu de [AB]. On cherche Δ, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 4$.

1) a) Démontrer que
$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$$

b) En déduire que :
$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 2$$

2a) Faire une figure et placer le point H de (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IH} = 2$

b) En déduire l'ensemble Δ et le tracer.

---

1)a) $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$

$= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

$= (\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

$= \overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

b) $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) = 4$

or $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$

$= 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}$

$= 2\overrightarrow{MI}$

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot 2\overrightarrow{MI} = 4$

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI} = \frac{4}{2} = 2.$

$M \in \Delta \Leftrightarrow (-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{IM}) = 2$

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 2$

2a)

$AB = 3$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = 2$ donc

$AB \times IH = 2$ et $H \in [AB)$

$IH = \frac{2}{3}$ et $H \in [AB]$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 2$

Soit M' le projeté orthogonal de M sur (AB).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM'} = 2$

donc M' et H sont confondues. Ainsi

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = 2$.

L'ensemble des points M est donc ceux qui ont comme projeté orthogonal H.

Δ est donc de la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.