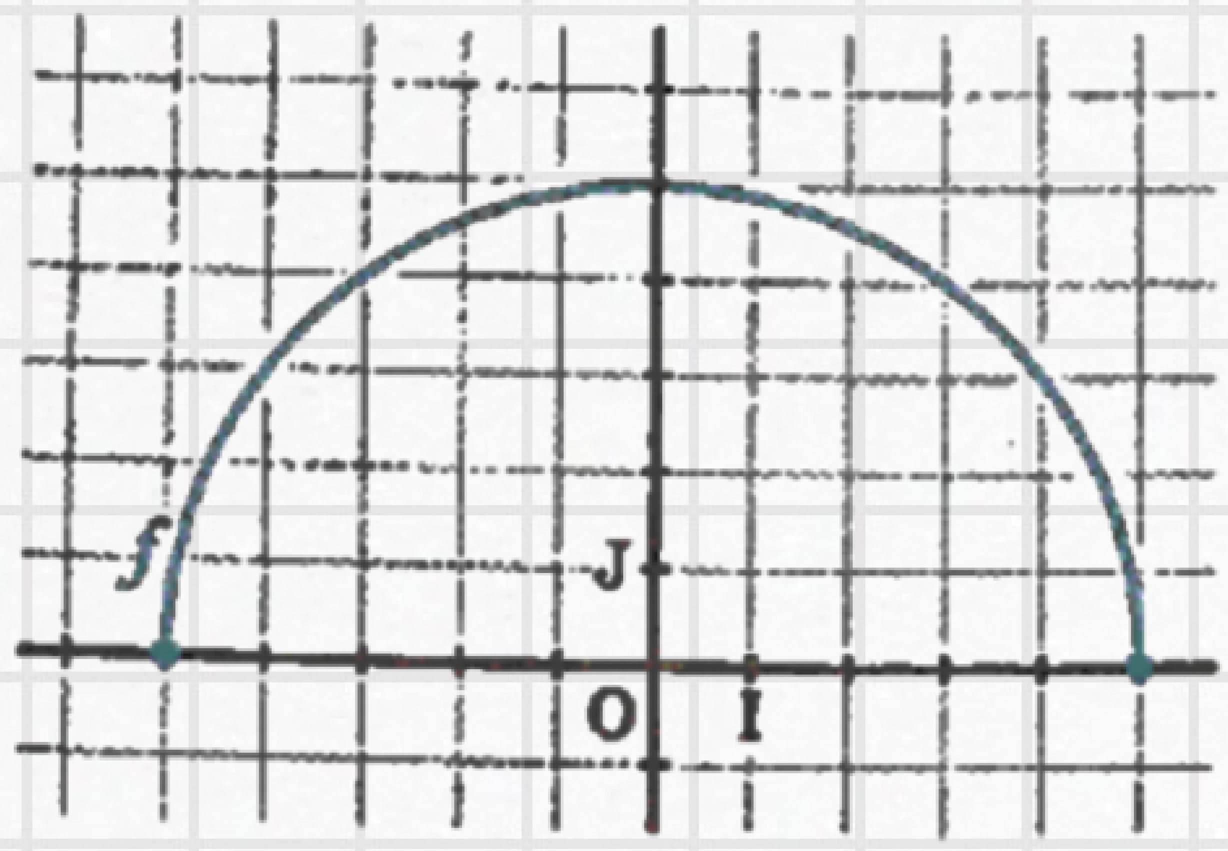
Exercices Généralités sur les fonctions

28



1. L'ensemble de définition de f est $[0\,;5]$.
2. -3 a pour image 4.
3. 4 a pour image -3.
4. L'antécédent de 5 est 0.
5. L'antécédent de 0 est 5.
6. Un antécédent de 2 est -4,6.

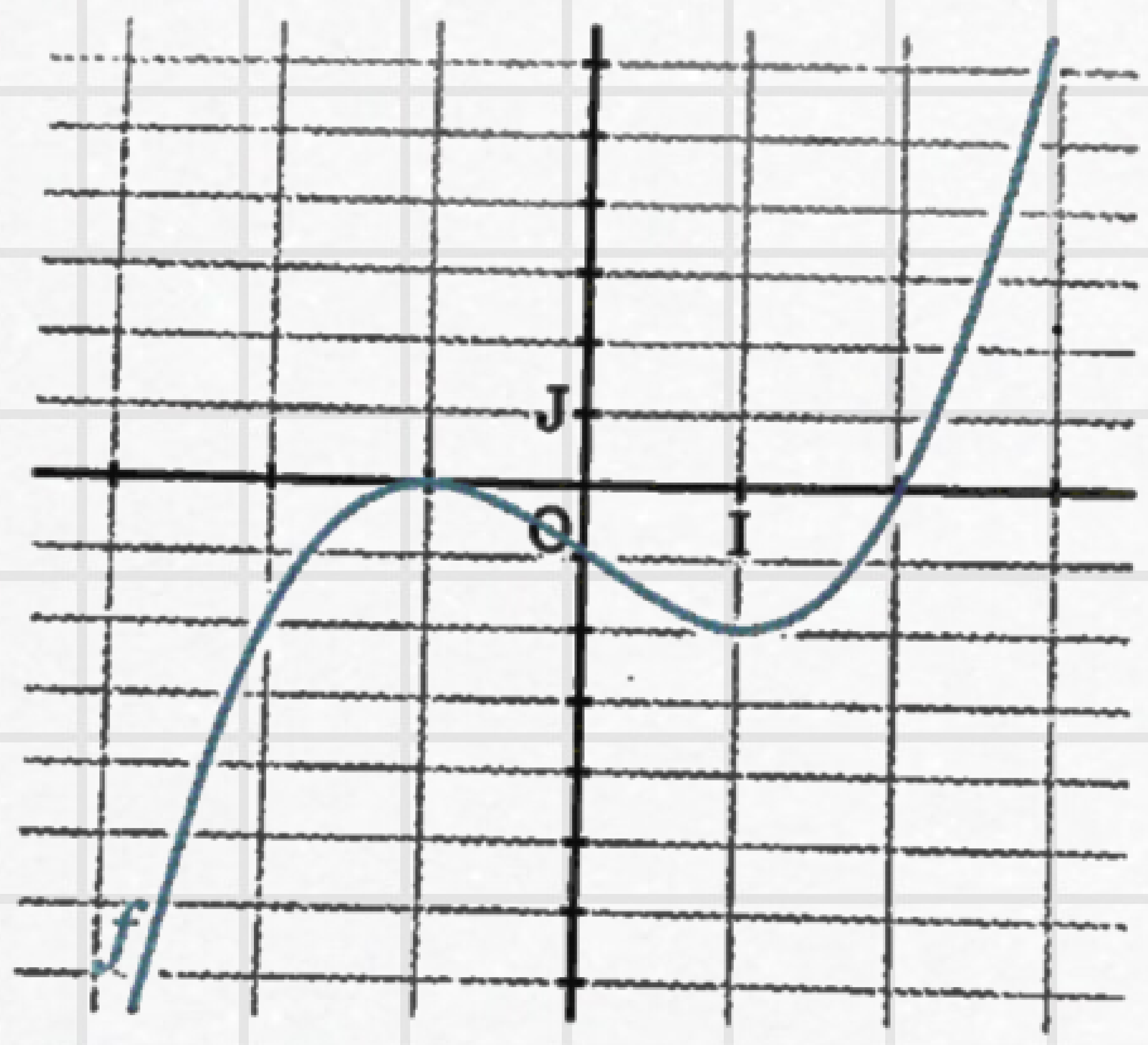
30 [Représenter.]

On considère une fonction f vérifiant $f(2)=3$.

Compléter les phrases à trous suivantes :

1. … a pour image … par la fonction f.
2. Le point A(… ; …) est un point de la courbe représentative de la fonction f.
3. Le nombre réel … est une solution de l'équation $f(x)=\ldots$.
4. Le nombre réel … est un antécédent de … par la fonction f.

27 On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal.



Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-2	…	0	…	2
$f(x)$	…	0	…	-2	…

26 Pour chaque fonction, trouver la ligne du tableau correspondante.

1. $f(x)=x^2$
2. $g(x)=x$
3. $h(x)=x^3$
4. $i(x)=\sqrt{x^2}$
5. $j(x)=\dfrac{x^2}{x}$
6. $k(x)=(\sqrt{x})^2$

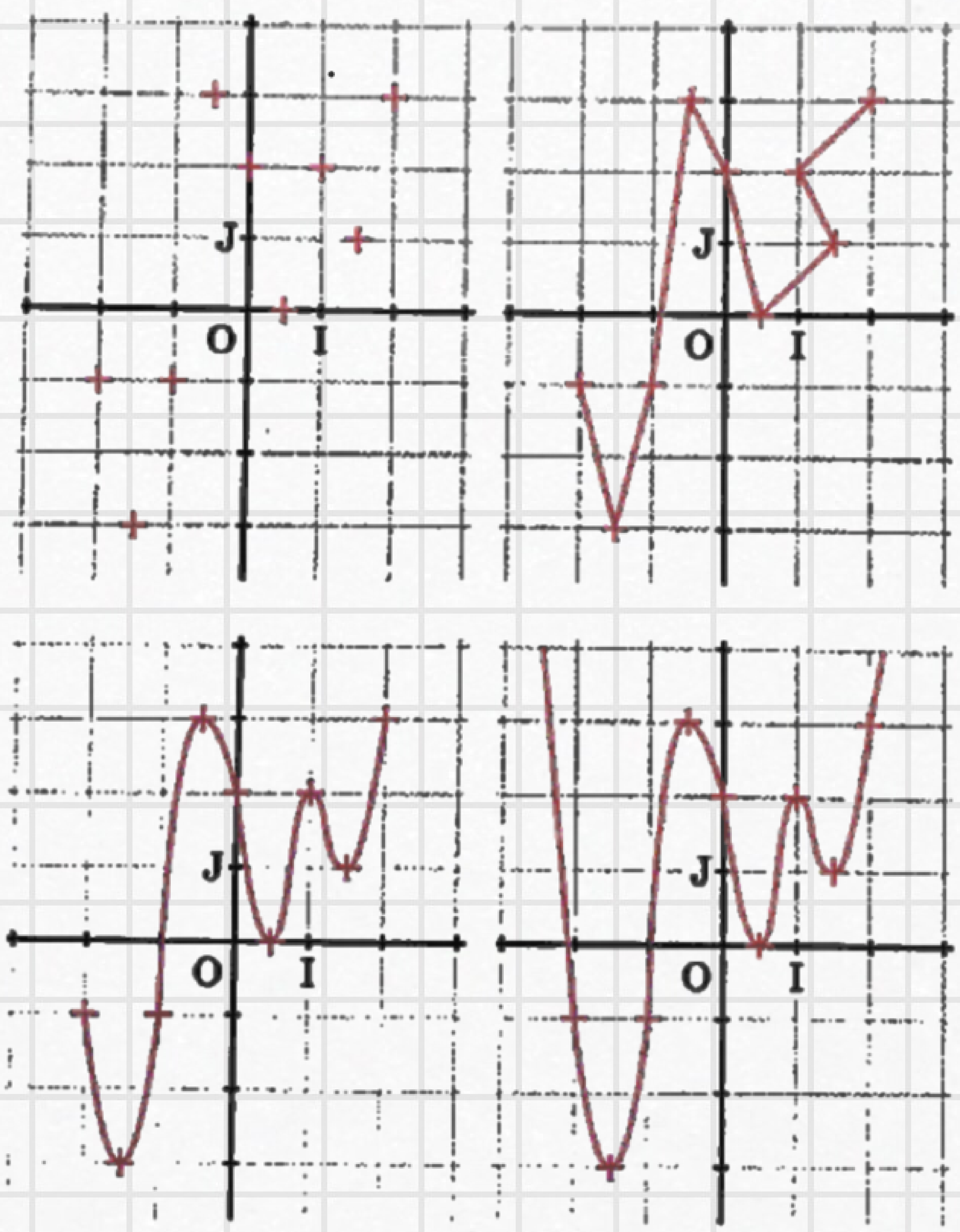
x	-1	0	1	2
?	-1	0	1	8
?	1	0	1	2
?	-1	0	1	2
?	non définie	0	1	2
?	-1	non définie	1	2
?	1	0	1	4

33 [Modéliser.]

f est une fonction définie sur $[-2\,;2]$ dont on donne le tableau de valeurs suivant.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-1	-3	-1	3	2	0	2	1	3

Quatre élèves proposent ci-dessous une représentation graphique de f.



Laquelle de ces courbes semble la plus satisfaisante ? Justifier.

32 [Représenter]

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. C_f est la courbe de f dans un repère.

Recopier le tableau ci-dessous et compléter les cases vides.

fonction	image	Courbe	Equation	Antécédent
$f(2)=3$				
	1 a pour image 0 par f			
		$\mathrm{A}(-2\,;3)$ est un point de C_f		
			Le réel 4 est une solution de l'équation $f(x)=5$	
				3 est un antécédent de -4 par f

14 On note h la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$ par $h(x)=\sqrt{25-x^2}$.

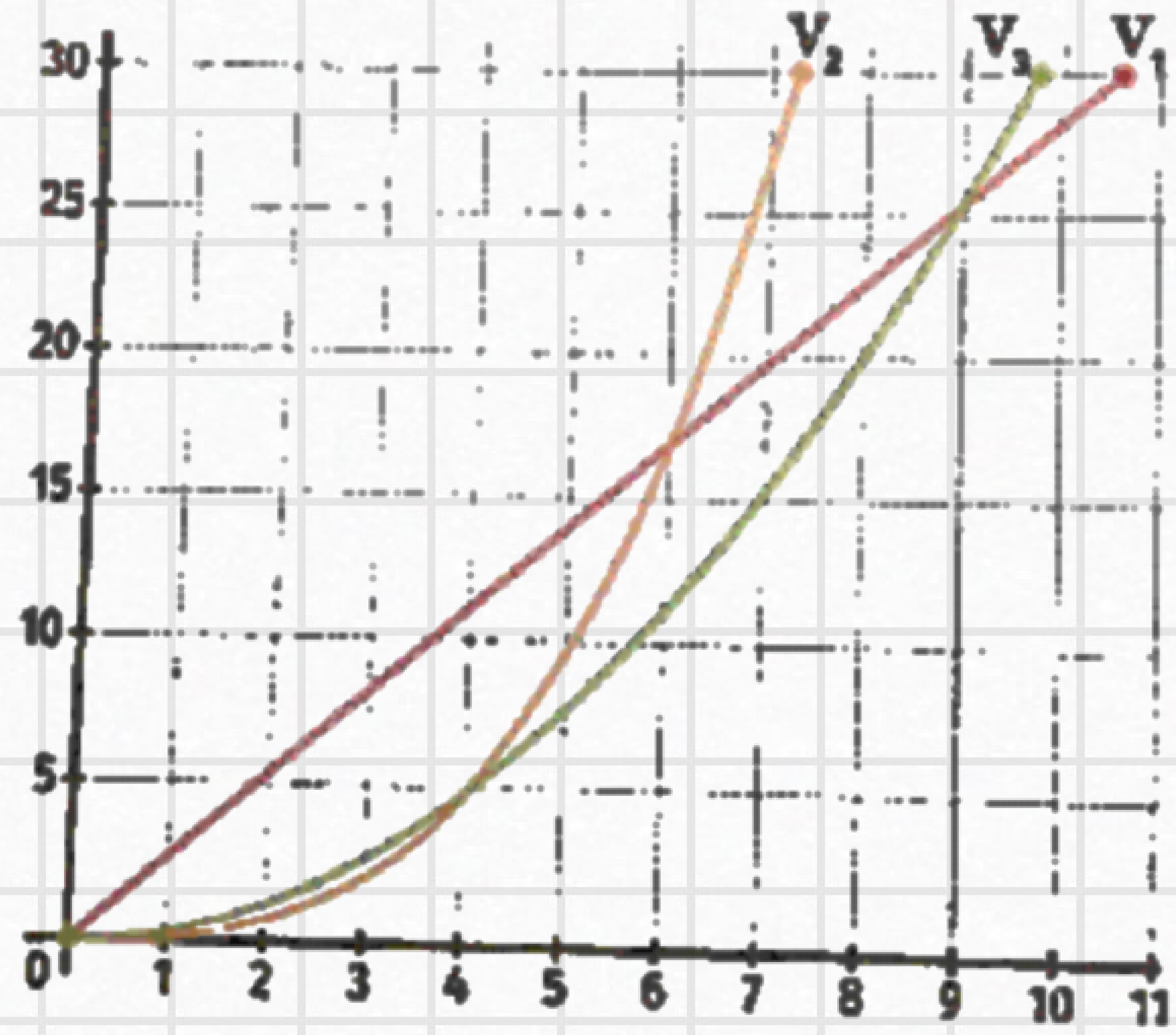
1. Déterminer les images de -4 ; 0 et 4 par h et interpréter les résultats.
2. Construire un tableau de valeurs sur $[-5\,;5]$ en calculant suffisamment d'images pour ensuite représenter à la main la courbe de h dans un repère orthonormé.
3. Déterminer graphiquement les antécédents de 4 par h et interpréter le résultat.
4. Résoudre graphiquement $h(x)=0$ et interpréter le résultat à l'aide du contexte.

35 [Chercher]

On considère les 3 verres ci-après et on note h la hauteur du liquide contenu dans chaque verre.

On note $\mathrm{V}_1(h)$, $\mathrm{V}_2(h)$ et $\mathrm{V}_3(h)$ les volumes respectifs de liquide (en cm³) dans ces 3 verres en fonction de h (en cm) jusqu'à remplissage complet.

On a tracé ci-dessous les différentes courbes représentatives des fonctions V_1, V_2 et V_3.

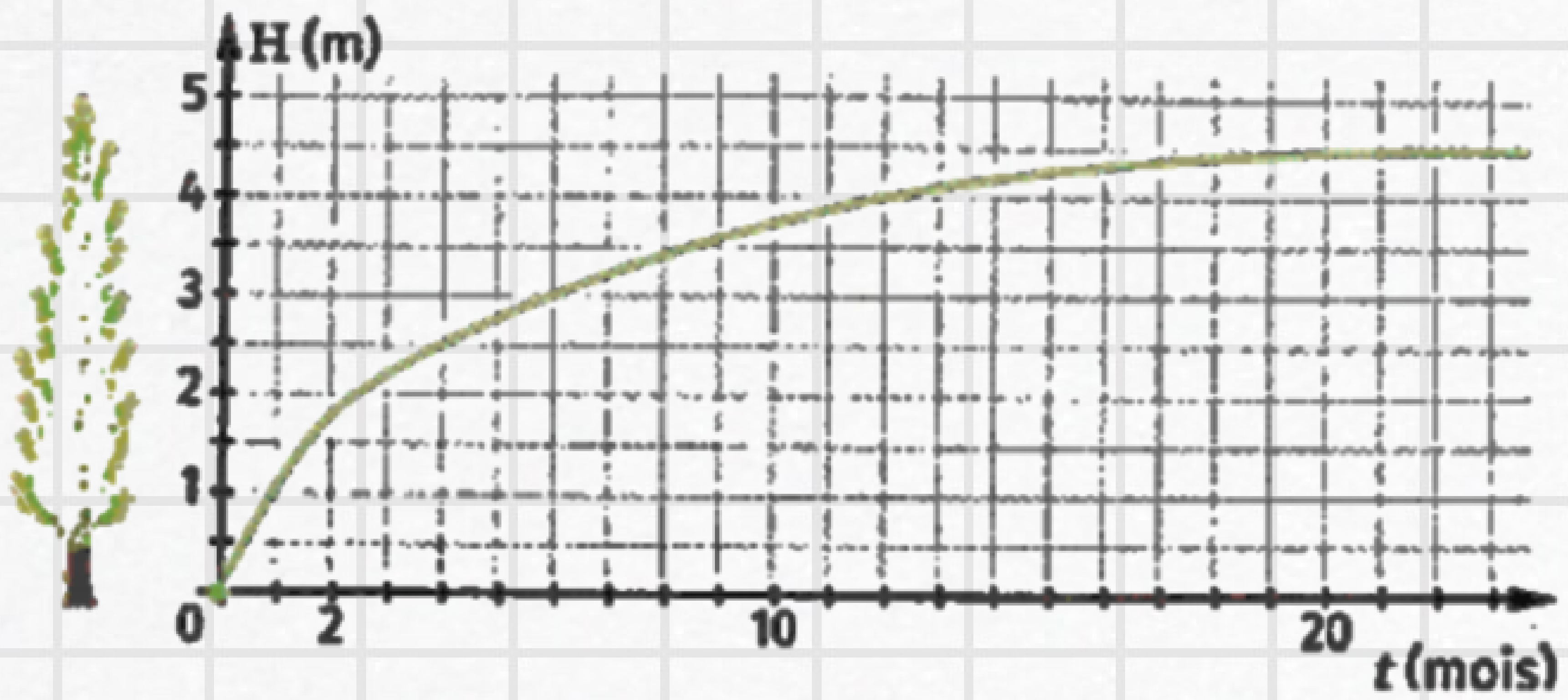


Pour chacun des 3 verres :

1. Préciser les ensembles de définition des volumes associés ainsi que les images à leurs extrémités. Interpréter ces résultats.
2. Préciser le volume à mi-hauteur, puis à mi-contenance.
3. On verse 20 cL : préciser la hauteur du liquide dans chacun des 3 verres.
4. Déterminer les coordonnées des différents points d'intersection et interpréter le résultat.
5. Si on remplit les 3 verres à une même hauteur, est-il possible que les 3 convives aient le même volume de liquide ? Justifier.

50 [Chercher.]

On considère la hauteur H, en mètre, d'un type d'arbre en fonction de son âge t (en mois).



1. Déterminer et interpréter $H(1)$.

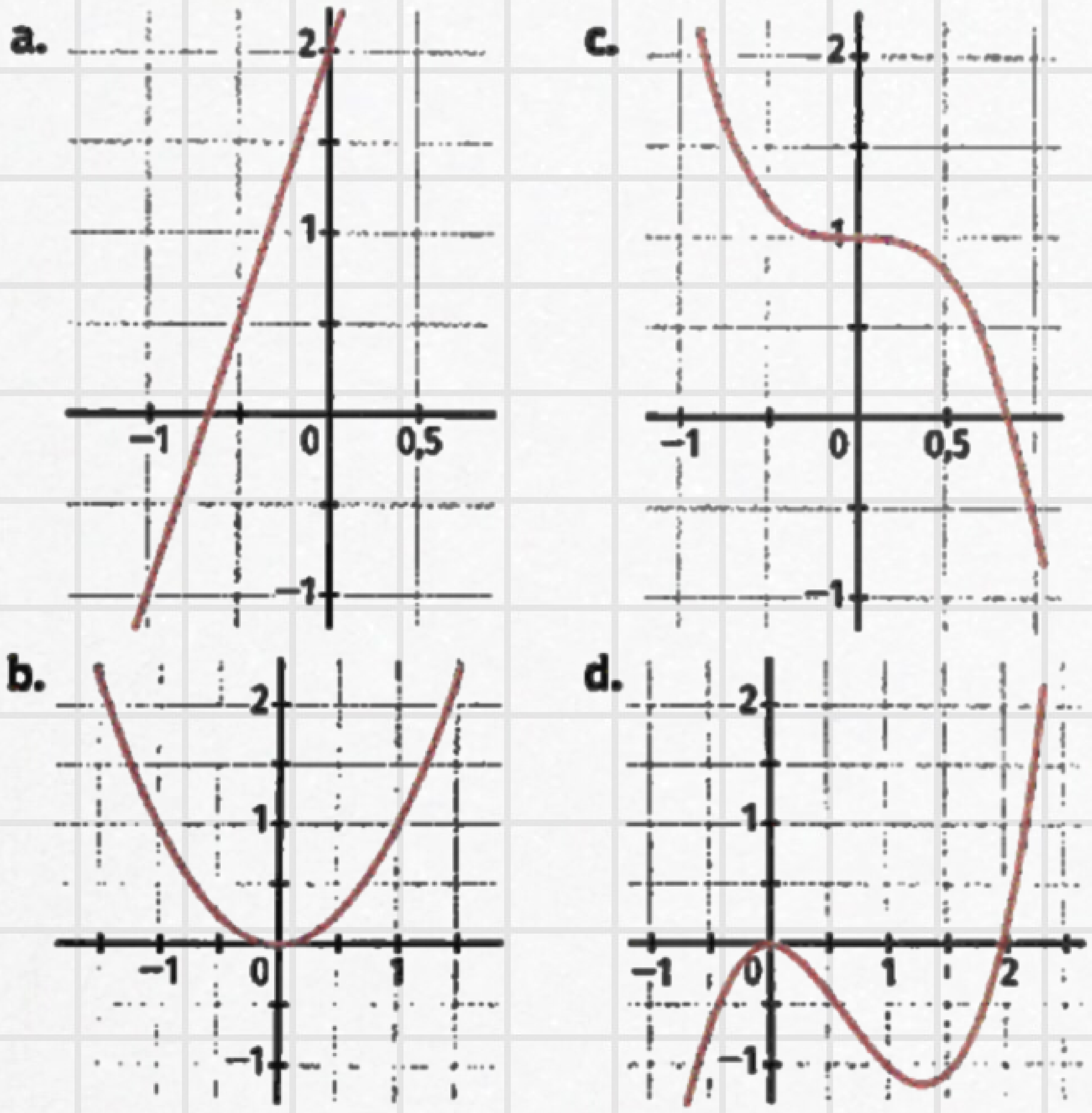
2. Ces arbres sont commercialisables dès qu'ils mesurent au moins 2 m : traduire cela par une inéquation et la résoudre.

3. À partir de quelle année ces arbres atteignent-ils leur hauteur maximale ?

4. Dès qu'ils atteignent 3,5 m, Jean taille ses arbres à une hauteur de 3 m. Les arbres repoussent au même rythme : quelle sera la fréquence des coupes après la première ?

50 [Chercher.]

Dans chaque cas, on a représenté dans un repère orthonormé une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



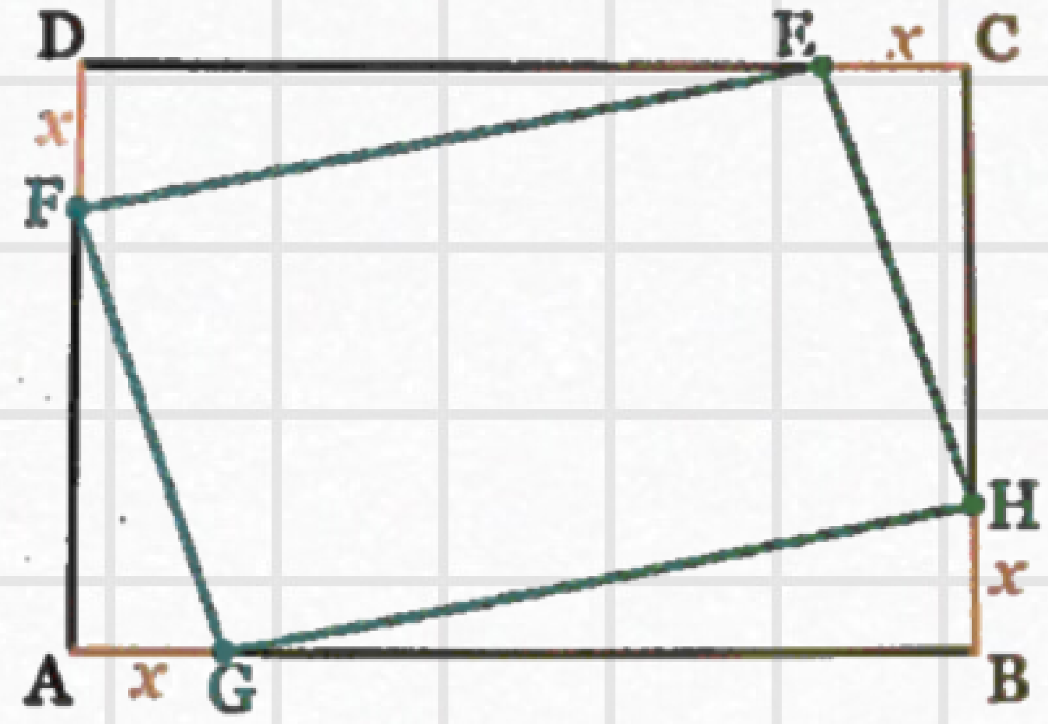
Pour chacune d'elle,

1. préciser graphiquement les solutions des équations $f(x)=-0{,}5$; $f(x)=0$, $f(x)=1$ et $f(x)=2$;

2. déterminer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ où $k\in\mathbb{R}$.

68 [Représenter.]

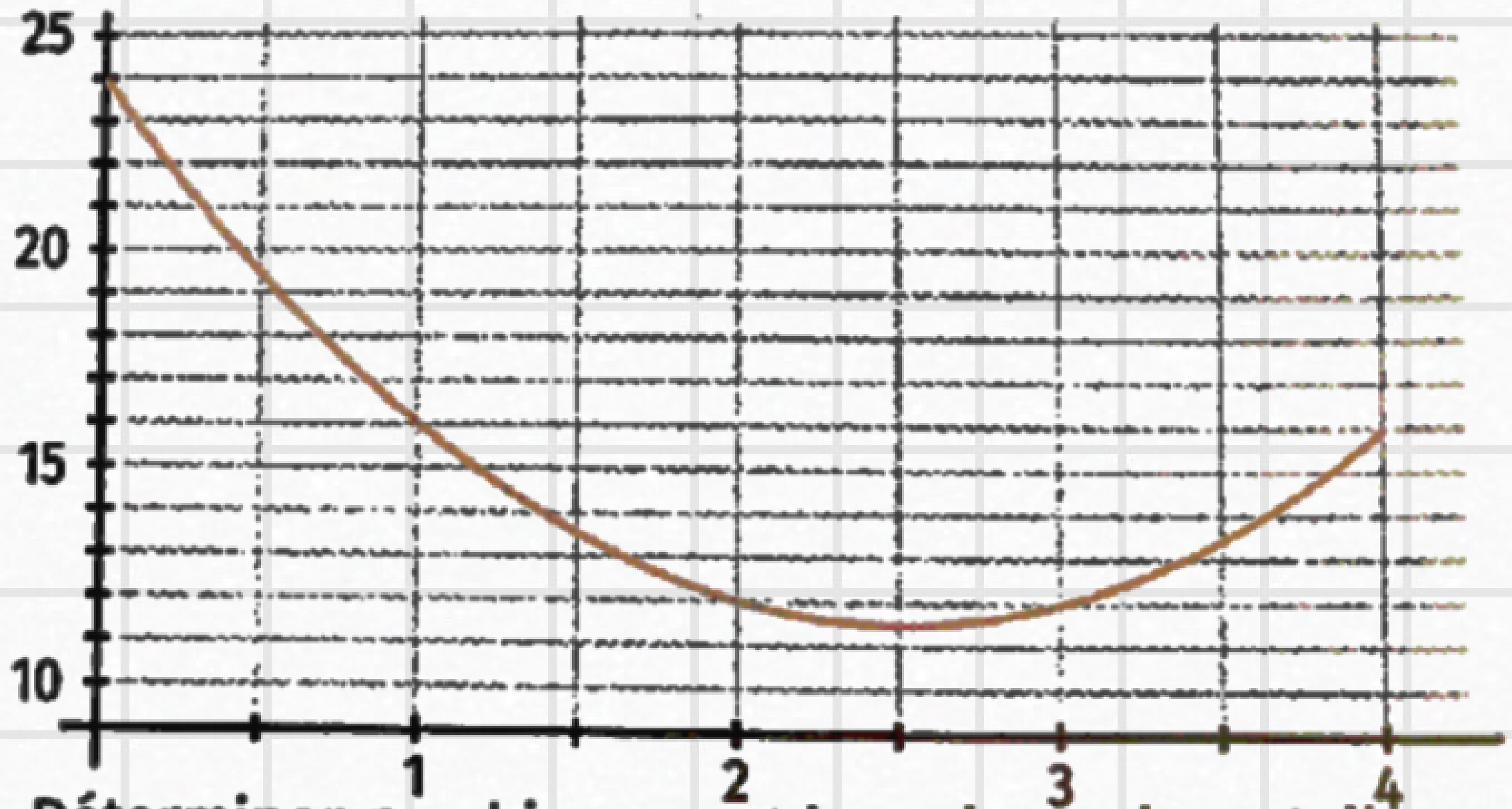
ABCD est un rectangle tel que $AB=6$ et $AD=4$.
On trace un parallélogramme EFGH sur ABCD tel que $AG=BH=CE=DF=x$.



1. À quel intervalle I appartient x ?

2. Montrer que, pour tout $x\in I$, l'aire $S(x)$ de EFGH est égale à $S(x)=24-x(6-x)-x(4-x)$ puis que $S(x)=24-10x+2x^2$.

3. On donne la courbe représentative de S dans un repère orthogonal.



Déterminer graphiquement les valeurs de x telles que :

- $S(x)=12$ (moitié de l'aire de ABCD) ;
- $S(x)=16$ (deux tiers de l'aire de ABCD) ;
- $S(x)=11{,}5$.

Vérifier ce dernier résultat par un calcul d'image.

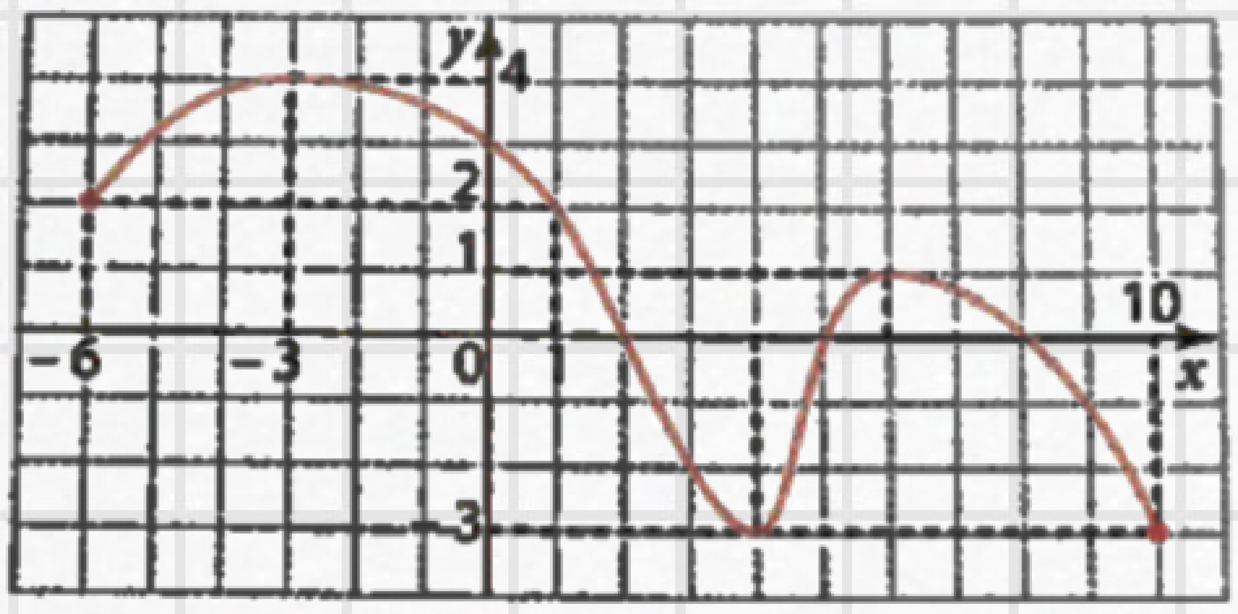
4. En prenant le centimètre pour unité, tracer les différents parallélogrammes EFGH répondant aux points précédents.

5. À l'aide d'un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice, donner une valeur approchée de x au dixième près telle que l'aire de EFGH soit égale aux trois quarts de l'aire de ABCD.

Résolution d'équations

1

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-6;10]$.



1. Résoudre graphiquement les équations :

a. $f(x)=2$ **b.** $f(x)=-3$ **c.** $f(x)=4$ **d.** $f(x)=1$

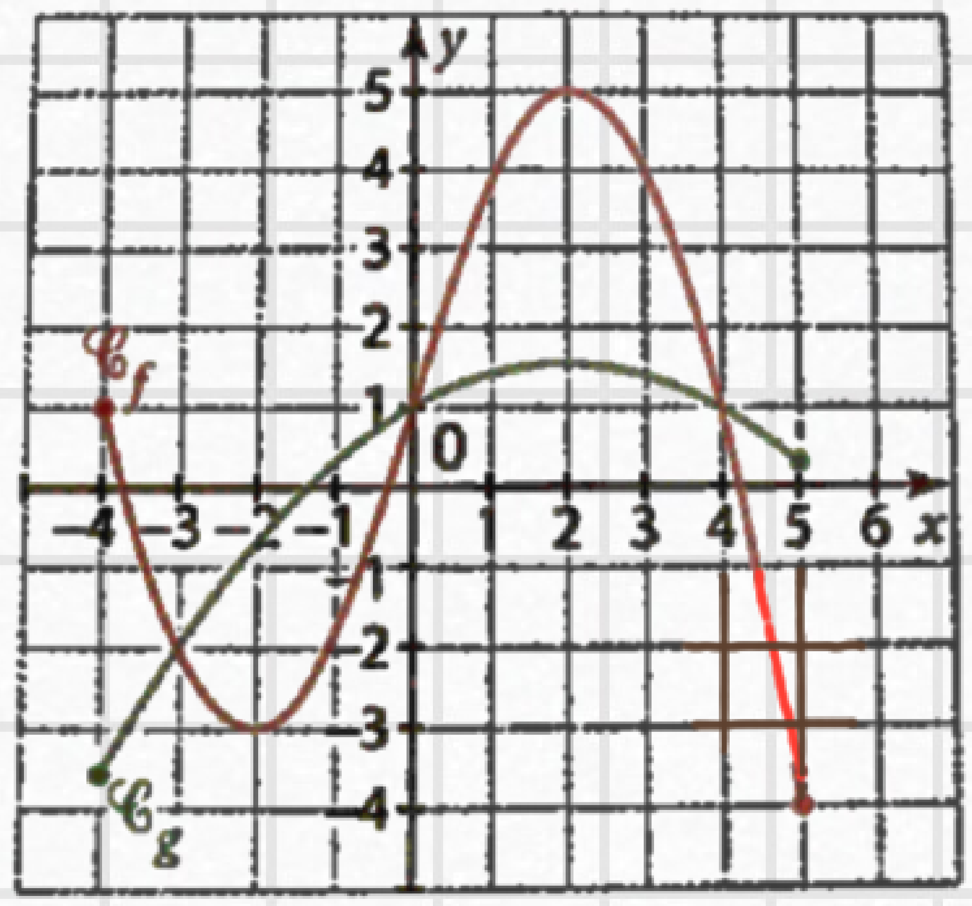
2. Combien de solutions possède l'équation $f(x)=3$? En donner des valeurs approchées à la précision de lecture graphique près.

2

Résoudre graphiquement les équations :

a. $f(x)=4$ **b.** $f(x)=1$ **c.** $g(x)=-2$

d. $g(x)=2$ **e.** $g(x)=0$ **f.** $f(x)=g(x)$



3

L'offre et la demande

Un constructeur automobile fabrique un nouveau modèle de voitures électriques.

Le prix de vente $f(x)$ en euros d'un véhicule dépend du nombre de véhicules susceptibles d'être vendus par mois.

Cette fonction s'appelle la fonction d'offre ; elle est définie par $f(x)=0{,}5x+6\,000$.

Le prix d'achat d'un véhicule dépend du nombre de véhicules susceptibles d'être achetés par mois.

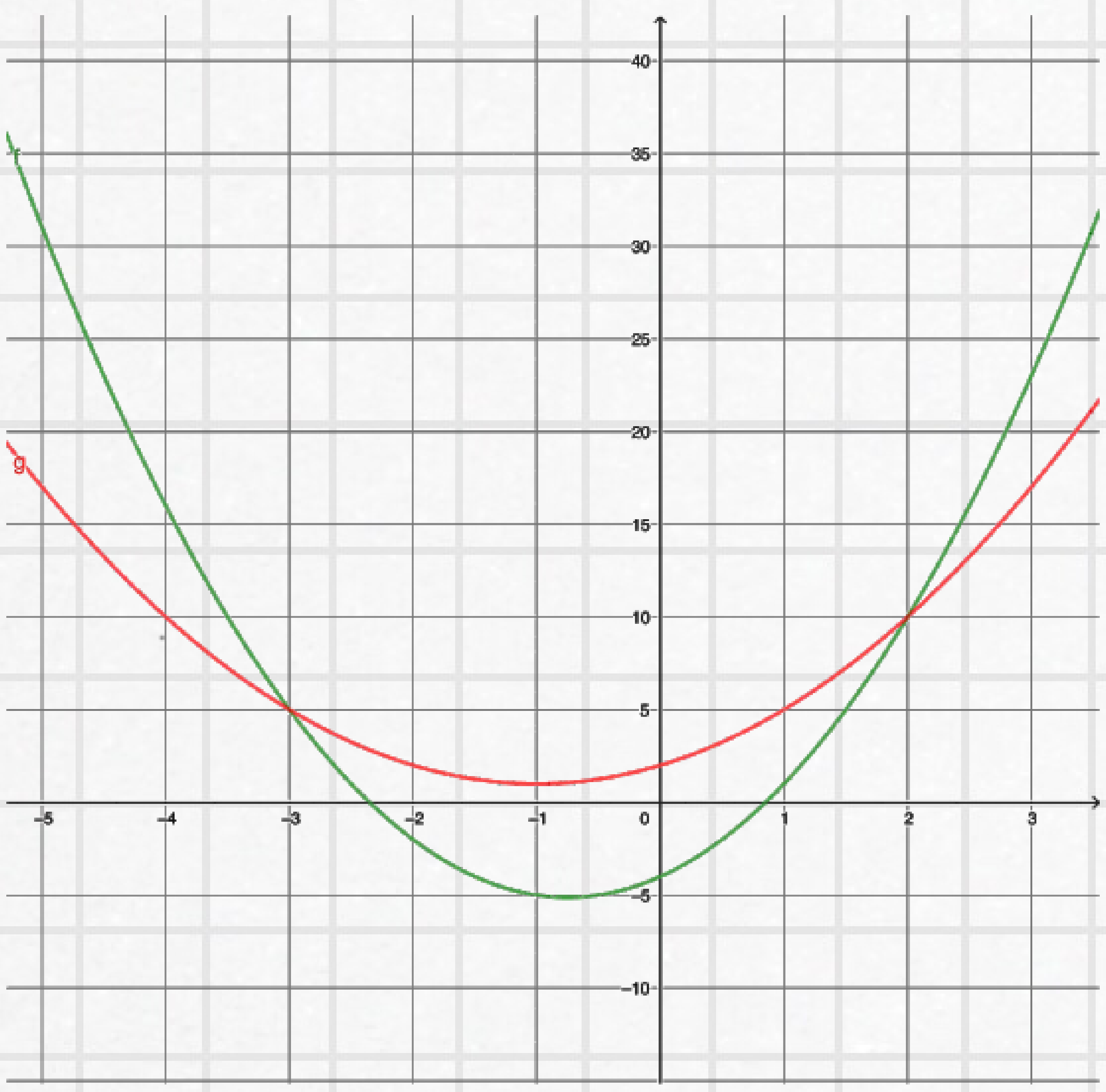
Cette fonction s'appelle la fonction de demande ; elle est définie par $g(x)=-0{,}375x+13\,000$.

1. Représenter dans un repère les fonctions d'offre et de demande en prenant les unités suivantes :
- sur l'axe des abscisses : 1 cm pour 500 véhicules ;
- sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 1 000 euros.

2. On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.
Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection des deux droites et en déduire le prix d'équilibre.

3. Vérifier par une résolution algébrique.

4



On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ et $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

1) Associer chacune des deux fonctions à leur courbe

2) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

3) Justifier que $f(x) = g(x)$ équivaut à $f(x) - g(x) = 0$.

4) Calculer $f(x) - g(x)$ et montrer que $f(x) - g(x) = (x-2)(x+3)$.

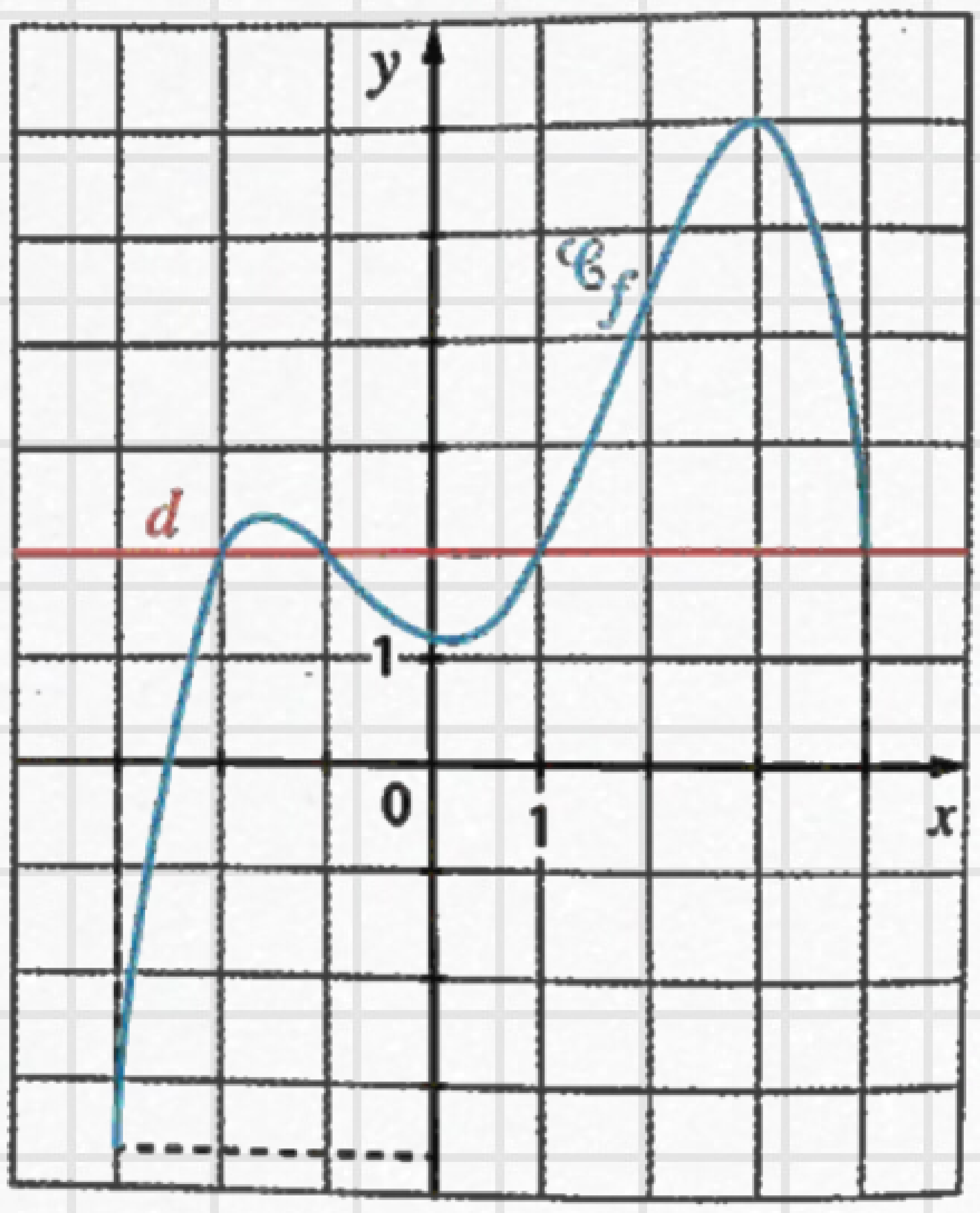
5) En déduire les solutions de $f(x) = g(x)$.

6) Calculer les coordonnées des points A et B d'intersection des deux courbes représentatives de f et g.

Résolution graphique d'inéquations

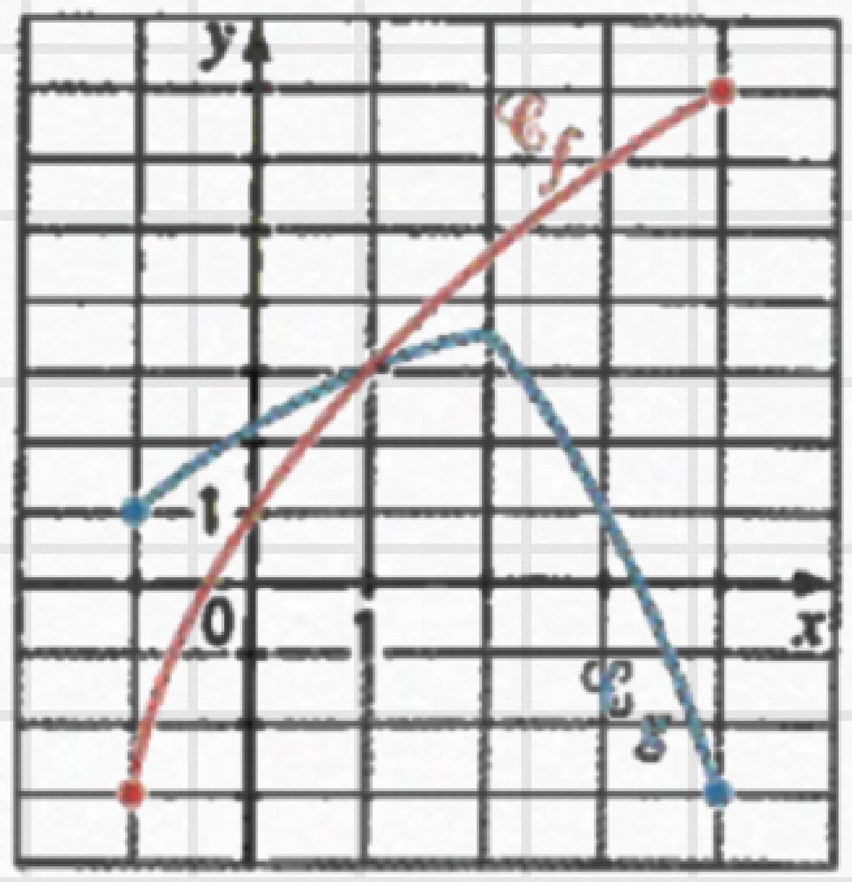
1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-contre. La droite d a pour équation $y=2$. Résoudre par lecture graphique l'équation et les inéquations suivantes.

a. $f(x)=2$
b. $f(x)<2$
c. $f(x)\geqslant 2$

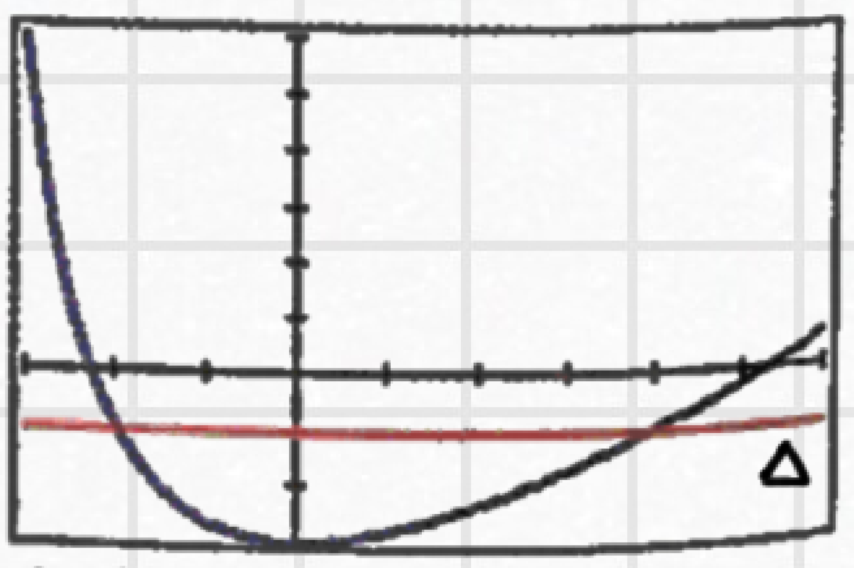


4 On donne ci-contre les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-1\,;4]$. Résoudre l'équation et les inéquations suivantes.

a. $f(x)=g(x)$ **b.** $f(x)\leqslant g(x)$
c. $f(x)>g(x)$



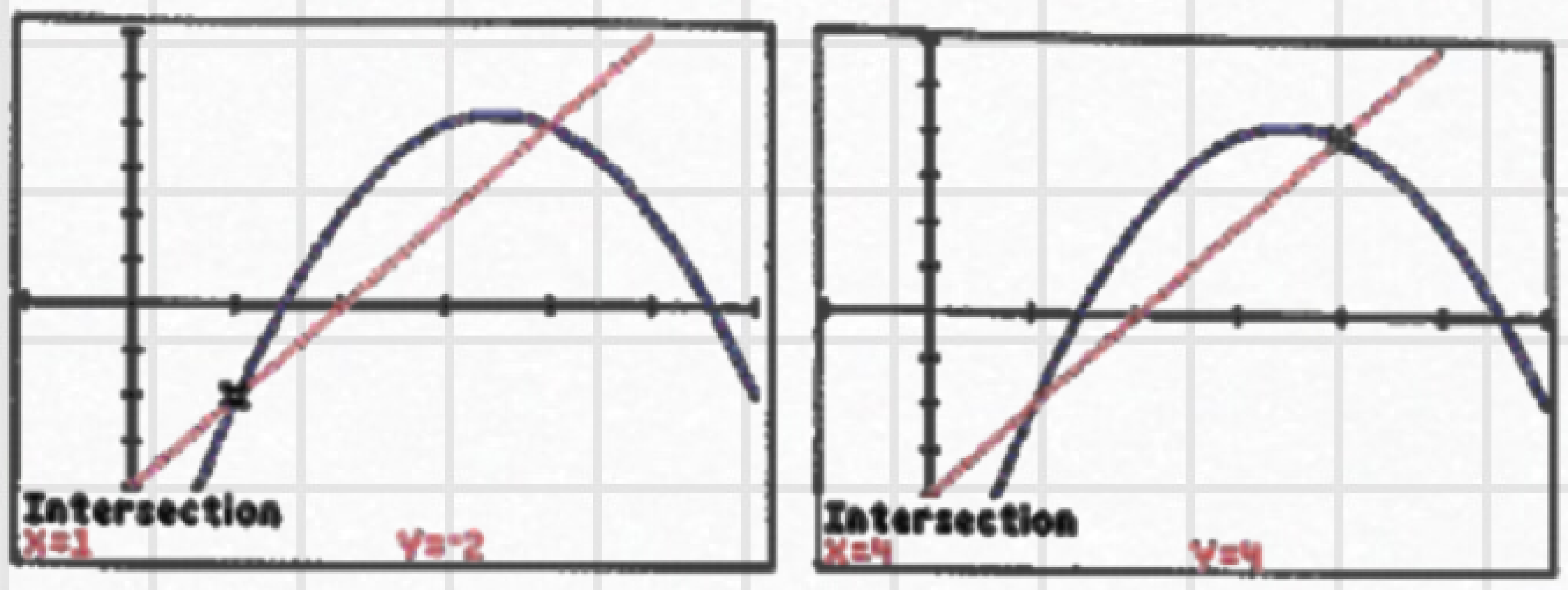
2 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;6]$ dont la courbe représentative a été obtenue sur une calculatrice. La droite Δ a pour équation $y=-1$.



Résoudre par lecture graphique les inéquations :

a. $g(x)>-1$; **b.** $g(x)<-1$; **c.** $g(x)\leqslant -1$.

5 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(x)=-x^2+7x-8$ et g une fonction affine définie sur $[0\,;5]$. On a tracé sur une calculatrice leurs courbes représentatives. En utilisant la fonction **intersection** de la calculatrice, on a obtenu les écrans ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.
3. On a $g(x)=2,1x-4,2$
Répondre aux deux questions précédents avec les valeurs exactes en utilisant le menu « Équations » de la calculatrice

3

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

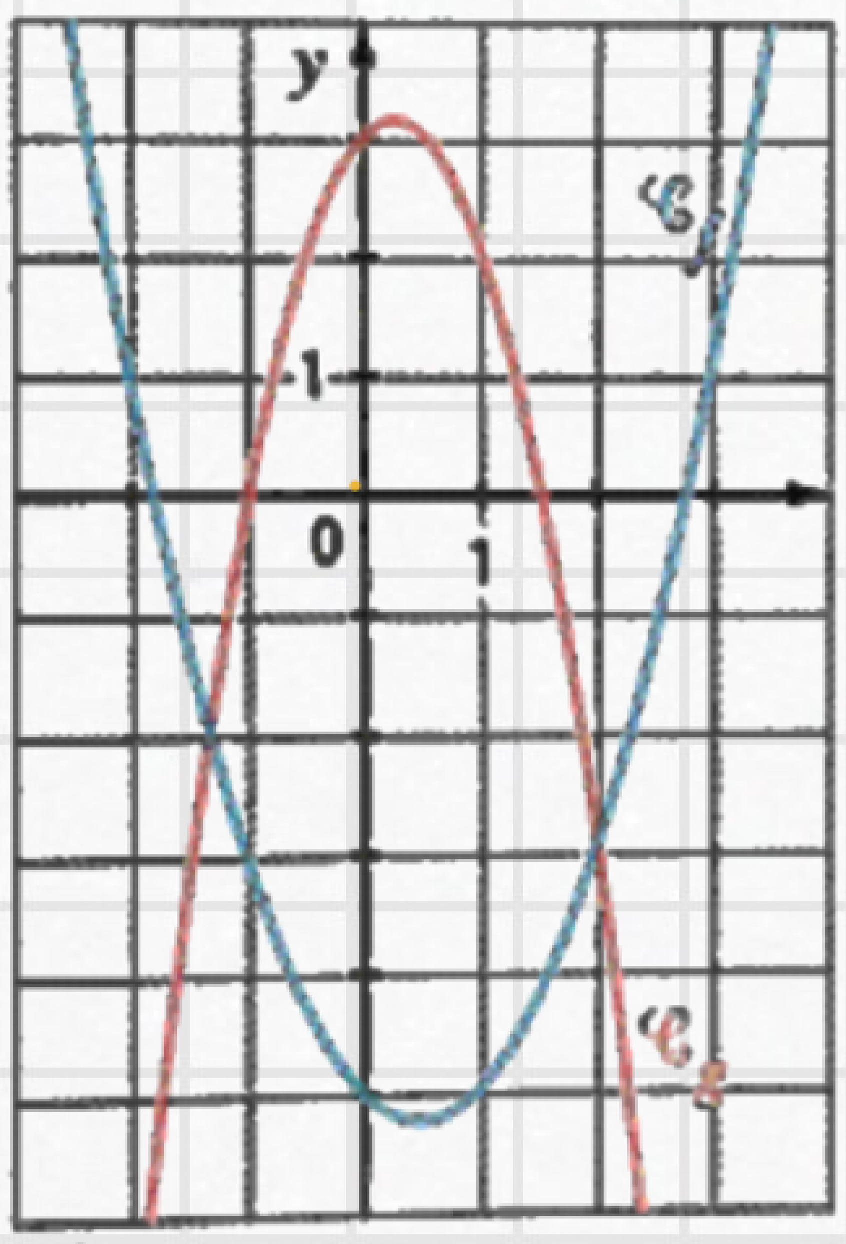
$$f(x)=x^2-x-5 \quad\text{et}\quad g(x)=-2x^2+x+3.$$

Leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tracées ci-contre.

1. Résoudre graphiquement :
a. l'équation $f(x)=g(x)$;
b. l'inéquation $f(x)<g(x)$.

2. Obtenir $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur une calculatrice, puis déterminer une valeur approchée au centième de la solution négative de l'équation $f(x)=g(x)$.

3. À l'aide de la calculatrice
a. déterminer les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x)=g(x)$;
b. résoudre les inéquations $f(x)<g(x)$ et $f(x)\geqslant g(x)$.



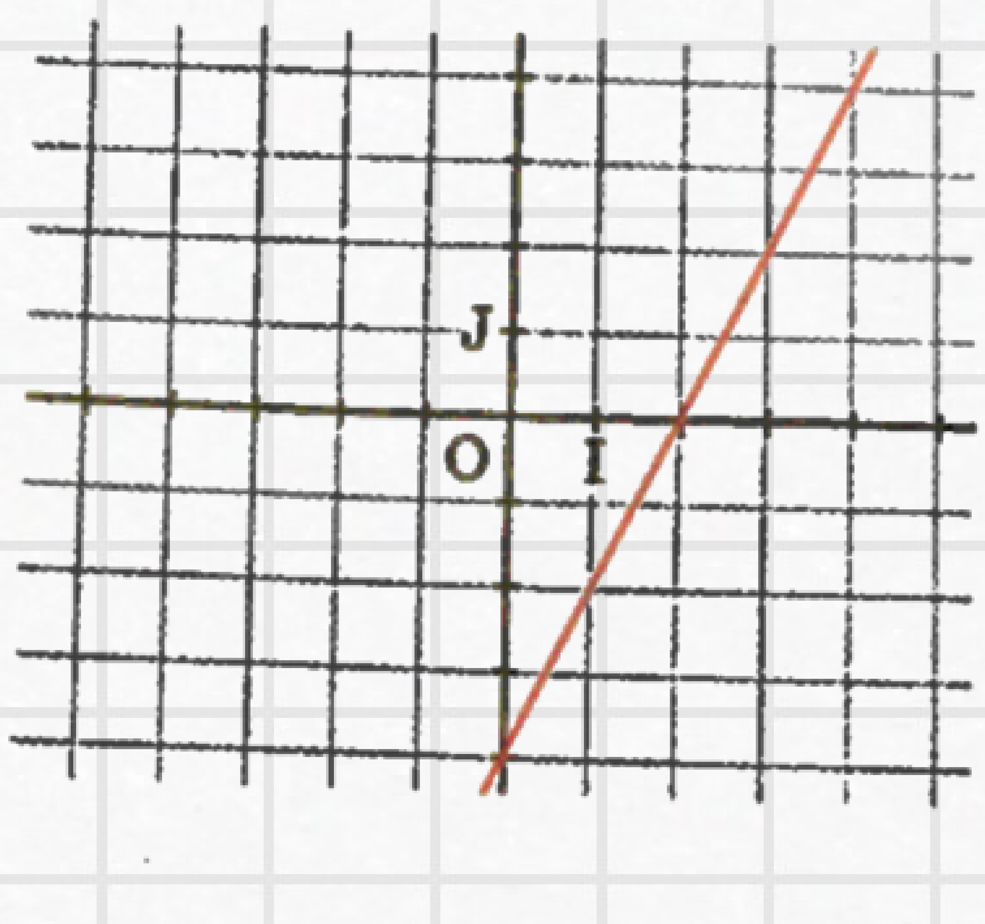
6 **1. a.** Représenter sur une calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x^2+x+1 \text{ et } g(x)=2x-2.$$

b. Conjecturer les solutions de l'inéquation $f(x)<g(x)$.
2. Vérifier cette conjecture à l'aide de votre calculatrice. (Menu : Equations)

7 On a représenté une fonction affine f dans le repère $(O\,;I\,,J)$ ci-contre.

1. Reproduire le repère et représenter la fonction affine g telle que :
$g(x)=3 \Leftrightarrow x=-5$ et
$g(x)=f(x)\Leftrightarrow x=3$.



2. Représenter la fonction affine h telle que :
$h(x)<2 \Leftrightarrow x\in[0\,;+\infty[$ et $h(x)\geqslant f(x)\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;1]$.

Variations de fonctions

① Associer à chaque tableau de variations ci-dessous la courbe correspondante ci-contre.

1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_1		↗	‖	↗	

2.

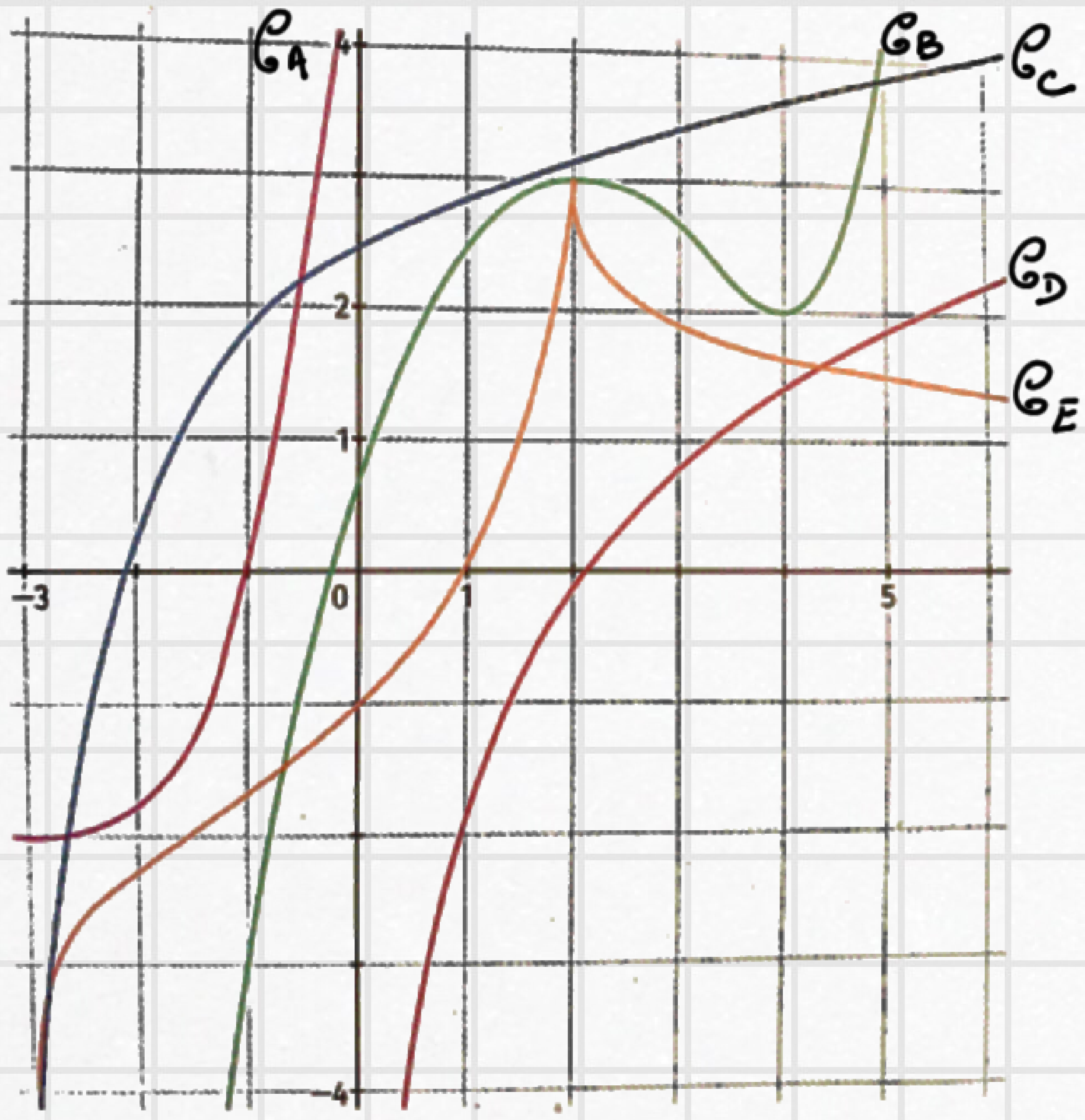
x	$-\infty$		$+\infty$
f_2		↗	

3.

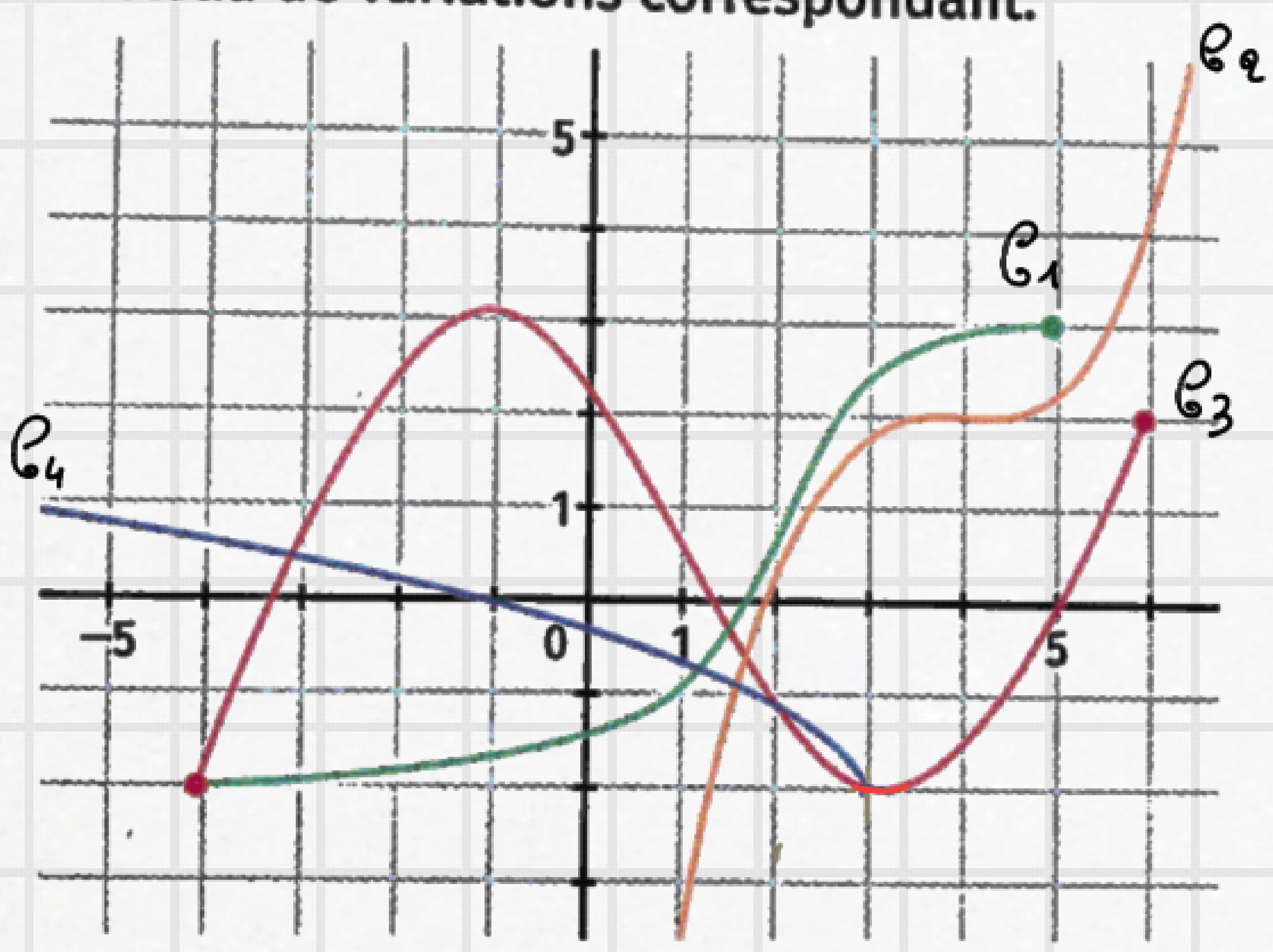
x	$-\infty$		2		$+\infty$
f_3		↗	3	↘	

4.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
f_4		↗	3	↘	2	↗	



② Pour chaque représentation graphique ci-dessous, dresser le tableau de variations correspondant.



③ VRAI - FAUX

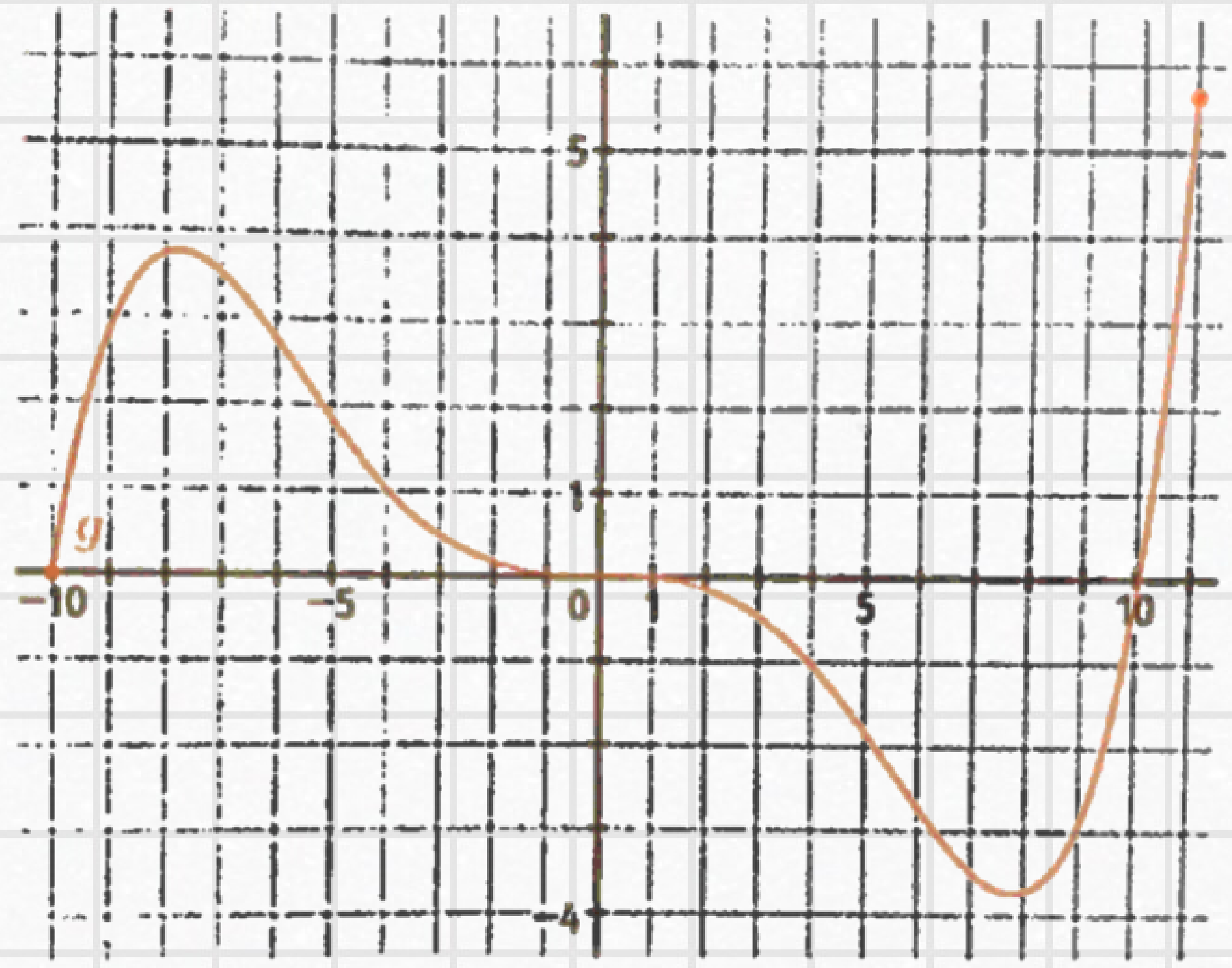
On considère une fonction f dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-3		0		2		5
f		↗	-5	↘	-7	↗	3	↘	1

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

1. L'ensemble de définition de f est $[-3\,;5]$.
2. f est croissante sur $[-7\,;3]$.
3. f est décroissante sur $[-3\,;2]$.
4. f est décroissante sur $[2\,;5]$.
5. f est négative sur $]-\infty\,;0]$.
6. f est positive sur $[0\,;2]$.
7. -7 est le minimum de f.
8. 3 est le maximum de f.

④ On considère une fonction g dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Décrire les variations de g sur son ensemble de définition et préciser son minimum et son maximum.

⑤ On considère une fonction f définie sur $[-7\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-7		4		8		15		$+\infty$
f	-5	↗	-1	↘	-3	↗	5	↘	0

• Une réponse exacte :

(a) Le maximum de f sur $[-7\,;+\infty[$ est :

a 4   b -1 c 5   d 15

(b) Le minimum de f sur $[-7\,;+\infty[$ est :

a -7 b -5 c -3 d On ne peut pas le savoir avec ce tableau.

(c) On ajoute que $f(20)=2$. Le maximum de f sur $[-5\,;20]$ est :

a 2   b 20   c 5   d -1

(d) Le minimum de f sur $[-7\,;20]$ est :

a -7 b -5 c -3 d 2

• Plusieurs réponses exactes :

(e) f est décroissante sur :

a $[4\,;8]$ b $]5\,;7[$ c $]3\,;6[$ d $[15\,;30]$

(f) f est croissante sur :

a $[-3\,;5]$ c $[10\,;15]$
b $[-6\,;-5]$ d $[-7\,;4]\cup[8\,;15]$

(g) On peut affirmer que :

a $f(-6)<f(-5)$ c $f(5)<f(9)$
b $f(5)>f(6)$ d $f(16)>f(17)$

(h) Pour tout $x\in[4\,;15]$, $f(x)$ appartient à :

a $[4\,;15]$ c $[-3\,;5]$
b $[-3\,;-1]$ d $[-5\,;10]$

(6) On considère la fonction f définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{6x+6}{x+2}$.

1. Pourquoi ne pouvait-on pas définir f sur $[-2\,;+\infty[$?
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-1	0	1	2	4	8
$f(x)$						

3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
4. Dresser son tableau de variations sur $[-1\,;+\infty[$ et préciser ses éventuels extremums.

(7) On considère la fonction f définie sur $[-6\,;4]$ par $f(x)=\dfrac{40}{x^2+4}$.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

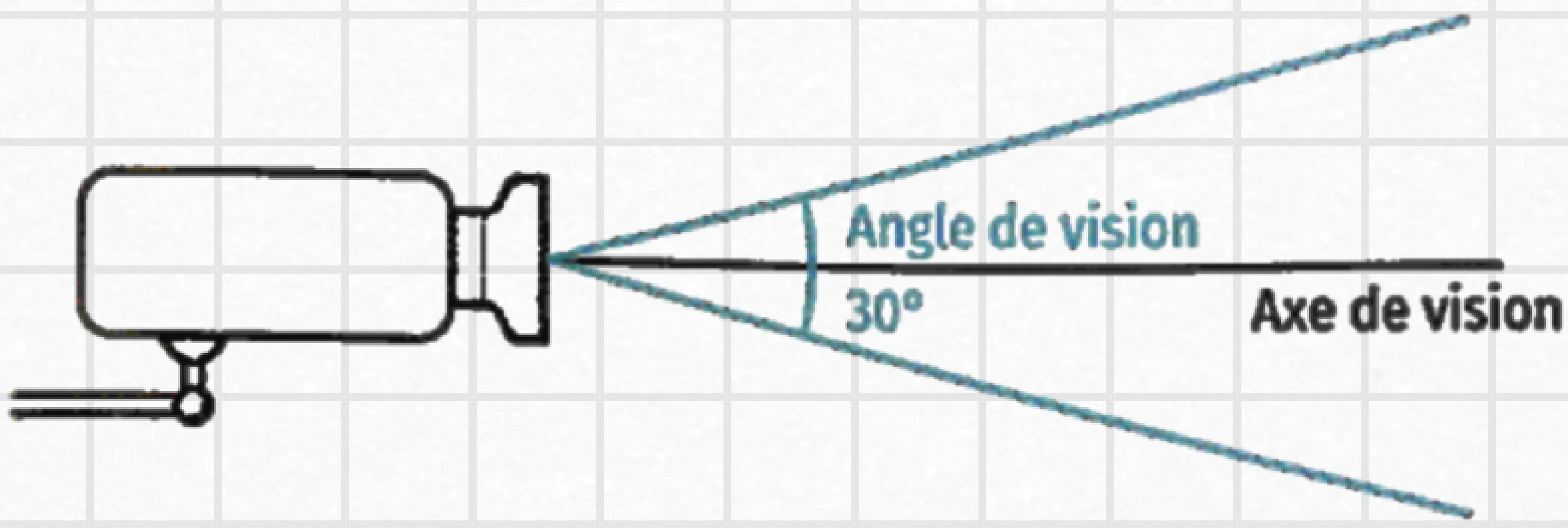
x	-6	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$								

2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Dresser son tableau de variations sur $[-6\,;4]$ et préciser ses éventuels extremums.

(8)

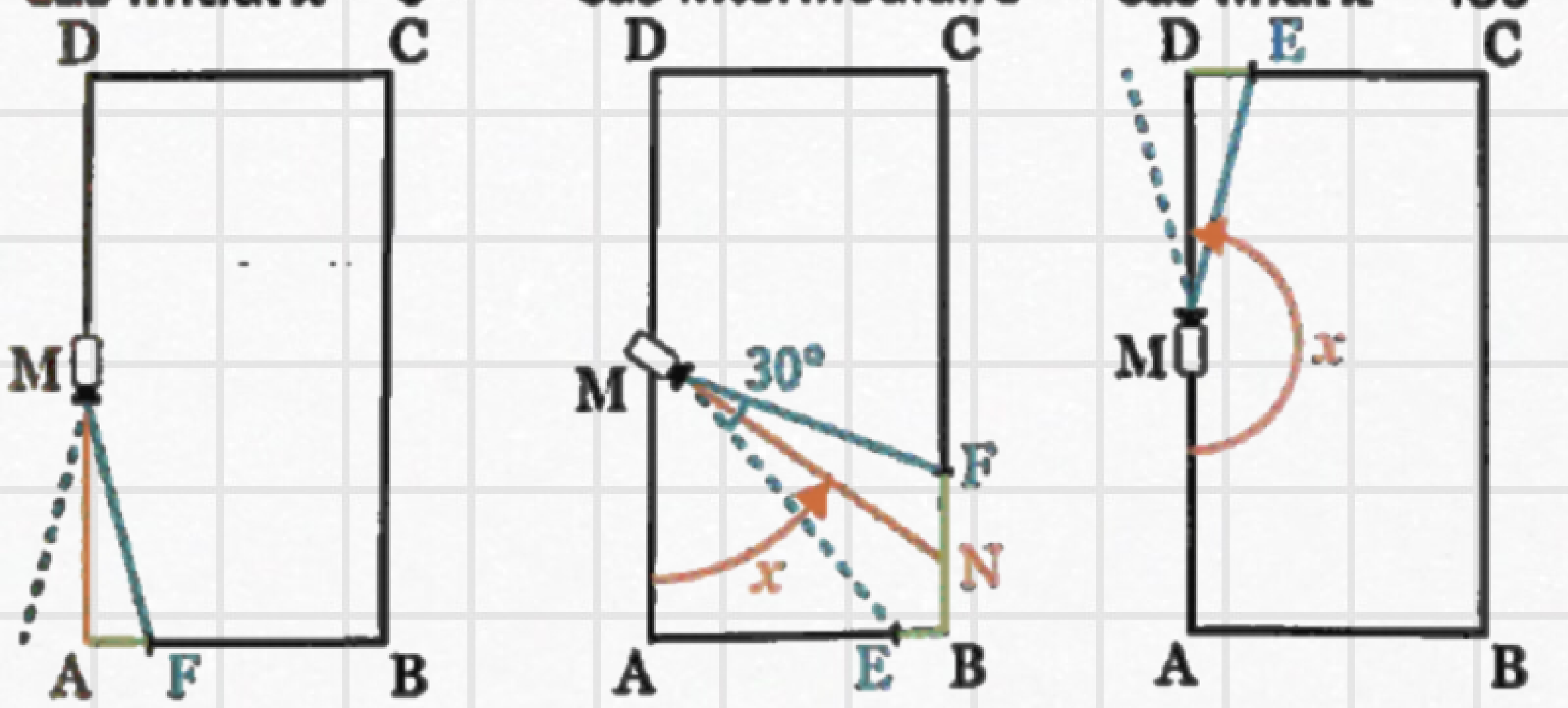
Un hangar a une forme rectangulaire $ABCD$ avec $AB=100$ m et $BC=200$ m.

Pour surveiller ce hangar, on place une caméra au point M, milieu de $[AD]$. Son angle de vision est de 30°.

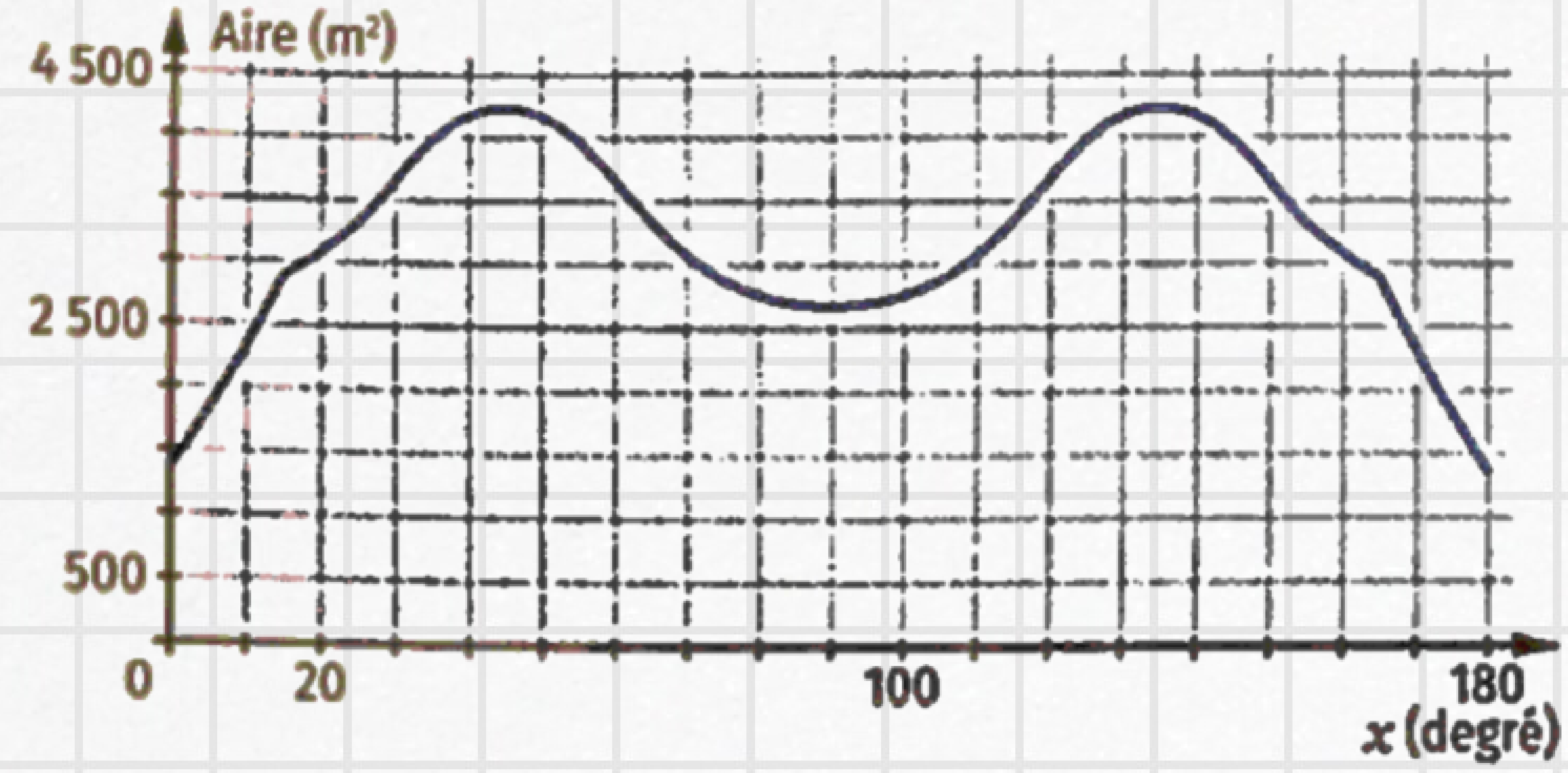


On note x l'angle, en degré, balayé par son axe de vision (MN) lors de la rotation de la caméra.

Cas initial $x=0°$ Cas intermédiaire   Cas final $x=180°$



Dans un repère orthogonal, on trace la courbe représentative de l'aire S du hangar observable en fonction de $x\in[0;\,180]$ (en bleu sur les dessins précédents).



1. a. Tracer le tableau de variations de S sur $[0; 180]$.

b. Pour quels angles la fonction atteint-elle ses extremums ? Préciser les points N correspondants.

2. a. Pour quels angles la caméra a-t-elle un angle de vision de moins de 30° ?

b. Quelle est l'image de 15° ? En quels angles a-t-on la même aire ?

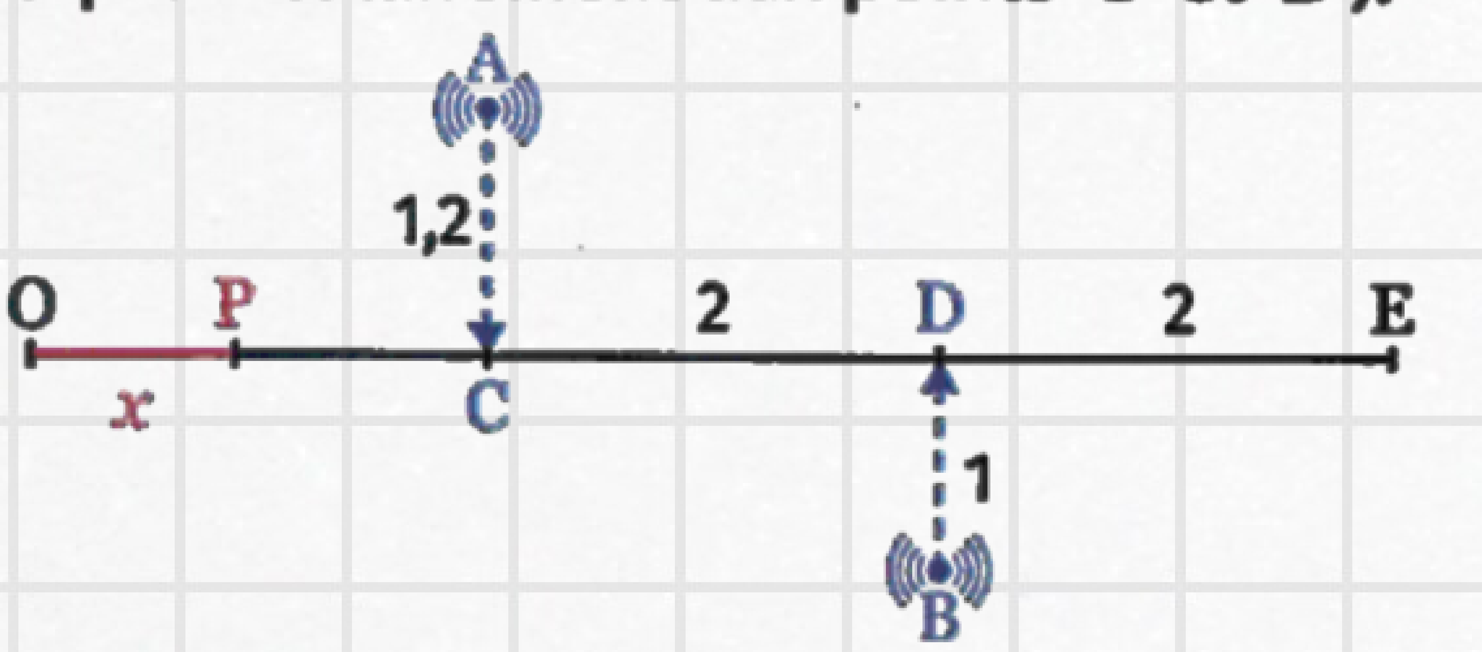
c. Quel est le minimum de S sur l'intervalle $[15; 165]$? Situer le point N correspondant.

3. Calculer l'aire de $ABCD$.

4. Pour quels angles la caméra balaye-t-elle plus de 20 % de l'aire du hangar ? Moins de 15 % ?

9

Solal part de son domicile situé en O pour se rendre à son bureau E situé à 6 km. On note x la distance parcourue par Solal sur la route durant son trajet. Deux antennes-relais A et B de son opérateur téléphonique sont situées à 1,2 km et 1 km de part et d'autre de la route (perpendiculairement aux points C et D).



Le but est d'étudier les zones dans lesquelles Solal pourra recevoir du réseau téléphonique.
On suppose que $OC = CD = DE = 2$ km. La position de Solal sur la route est représentée par le point P.
Pour étudier l'intensité du signal reçu grâce aux antennes A et B, on considère les fonctions f et g définies sur $I = [0; 6]$ par $f(x) = \dfrac{10}{AP^2}$ pour l'antenne A et par $g(x) = \dfrac{10}{BP^2}$ pour l'antenne B.

1. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{10}{1{,}44 + (2-x)^2}$ et $g(x) = \dfrac{10}{1 + (4-x)^2}$.

2. On a tracé les courbes représentatives des fonctions f et g dans un même repère.

a. Tracer le tableau de variations de f et de g sur I.

b. Préciser les valeurs de x maximisant f puis g : pouvait-on trouver ces résultats par des considérations géométriques ?

3. Sachant que le mobile capte le signal de l'antenne qui émet la plus grande intensité : préciser, suivant les valeurs de x, l'antenne qui sera captée par le mobile (en précisant les inéquations correspondantes).

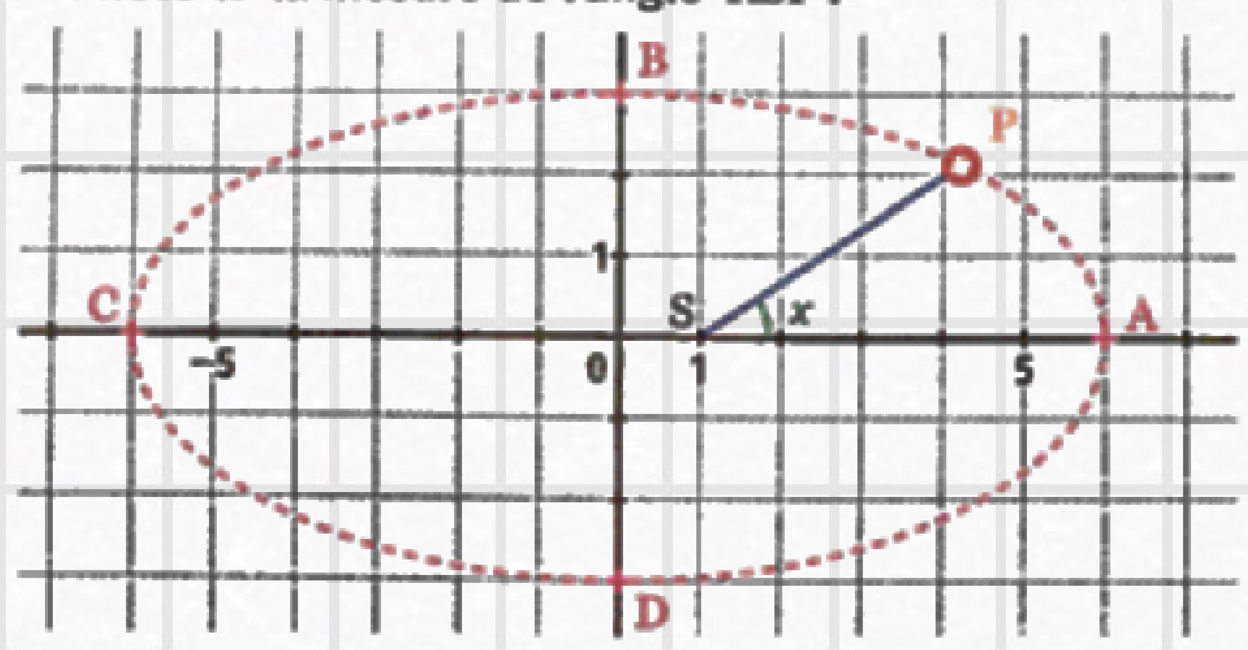
4. En réalité, le réseau est reçu par le mobile lorsque l'intensité du signal est supérieure ou égale à 4.

a. Pour l'antenne A : quelle inéquation concernant $f(x)$ cela revient-il à résoudre ? Préciser les valeurs de x correspondantes.

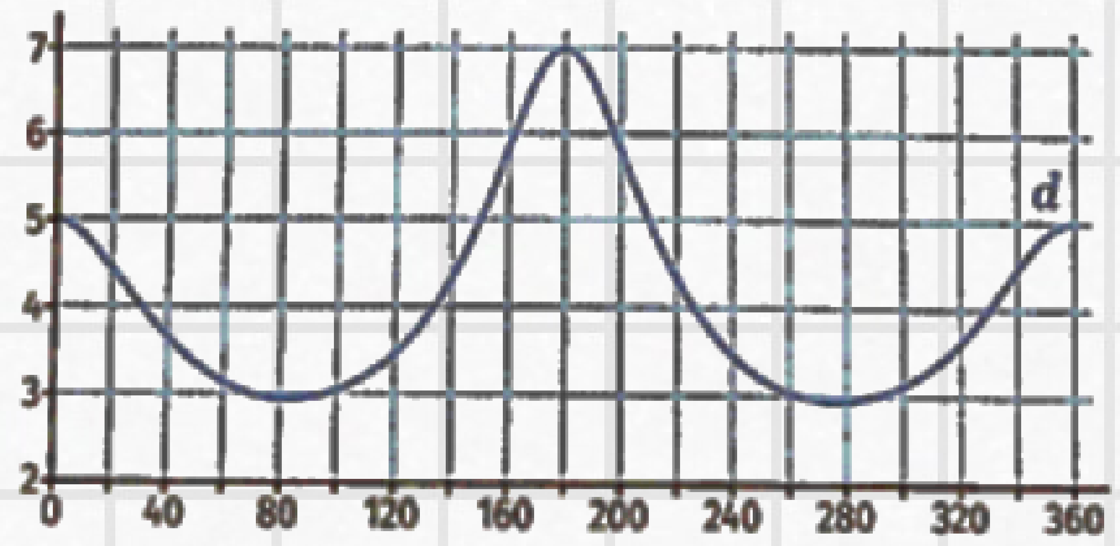
b. Répondre à la question précédente pour l'antenne B.

10

Un satellite situé en un point $S(0;1)$ observe une planète P qui suit une trajectoire elliptique.
On note x la mesure de l'angle $\widehat{ASP}$.



Dans le repère ci-dessous, on a représenté la fonction $d : x \mapsto SP$ pour $x \in [0; 360]$.



1. La distance minimale entre S et P se situe-t-elle en B ? Justifier.

2. Dresser le tableau de variations de d sur l'intervalle $[0; 360]$.

3. Si la rotation continue, quelle allure aura la courbe de d ?