Nombre dérivé – Dérivabilité

39 [Calculer.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x$.

1. Soit h un réel non nul. Exprimer $f(2+h) - f(2)$ en fonction de h.

2. Montrer que f est dérivable en 2 et donner la valeur du nombre dérivé de f en 2.

3. Vérifier le résultat à la calculatrice.

40 [Calculer.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Vérifier que pour tous réels a et b :
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. Soit h un réel non nul.
Exprimer le quotient $\dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$ en fonction de h.

3. En déduire que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

4. Vérifier le résultat à la calculatrice.

41 [Calculer.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. a. Soit h un réel non nul.
Vérifier que $f(1+h) - f(1) = -\dfrac{h}{1+h}$.

b. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

2. Montrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

3. Vérifier les résultats à la calculatrice.

42 [Calculer.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$.

43 [Calculer.]

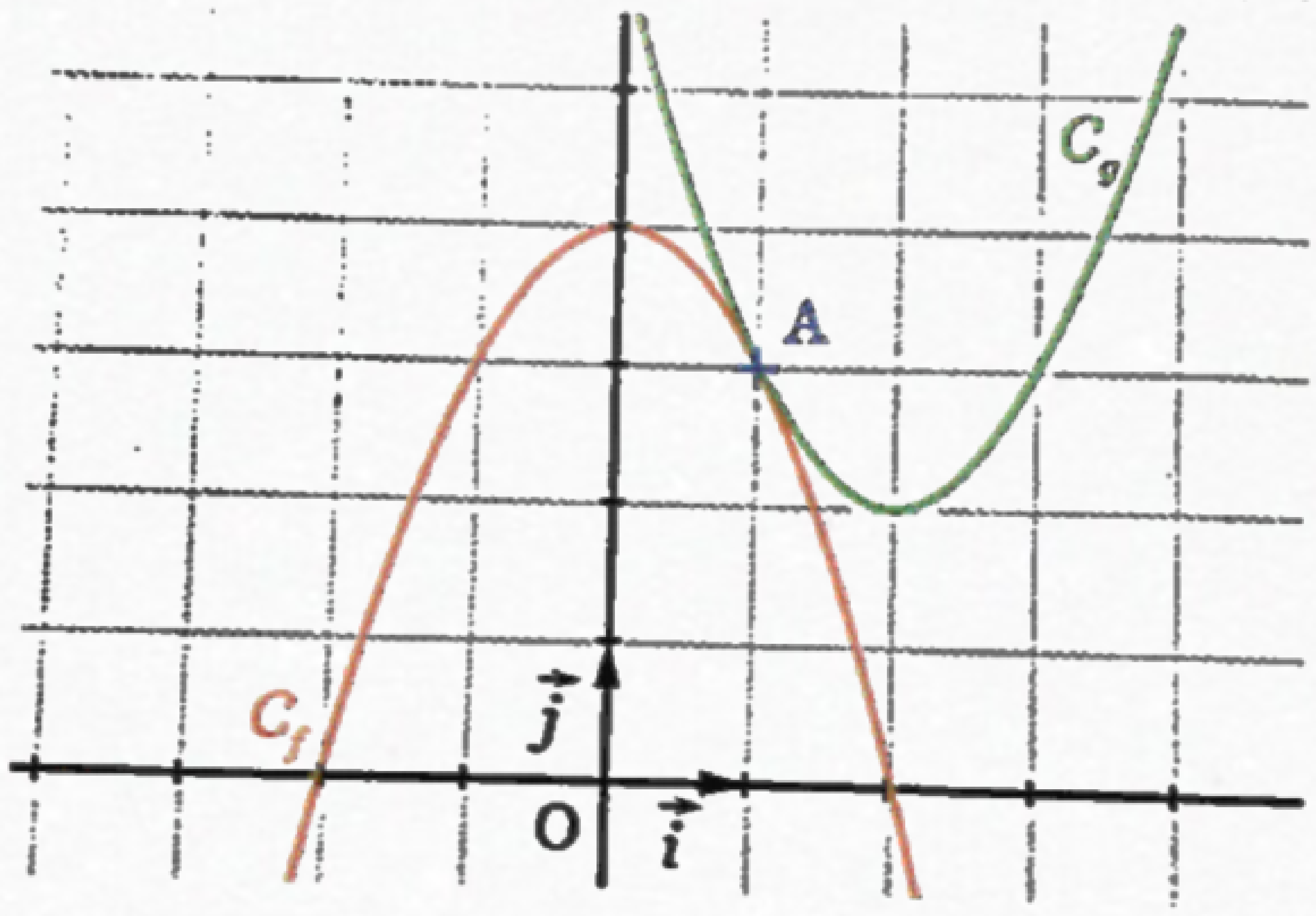
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$. Démontrer que f est dérivable en 3 et donner la valeur de $f'(3)$.

65 [Raisonner.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
Soit a un réel. À l'aide du taux de variation de f en a, justifier que f est dérivable en a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.

66 [Chercher.]

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x^2 - 4x + 6$ et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note leur courbe représentative C_f et C_g. On appelle A le point de coordonnées $(1\,;3)$.

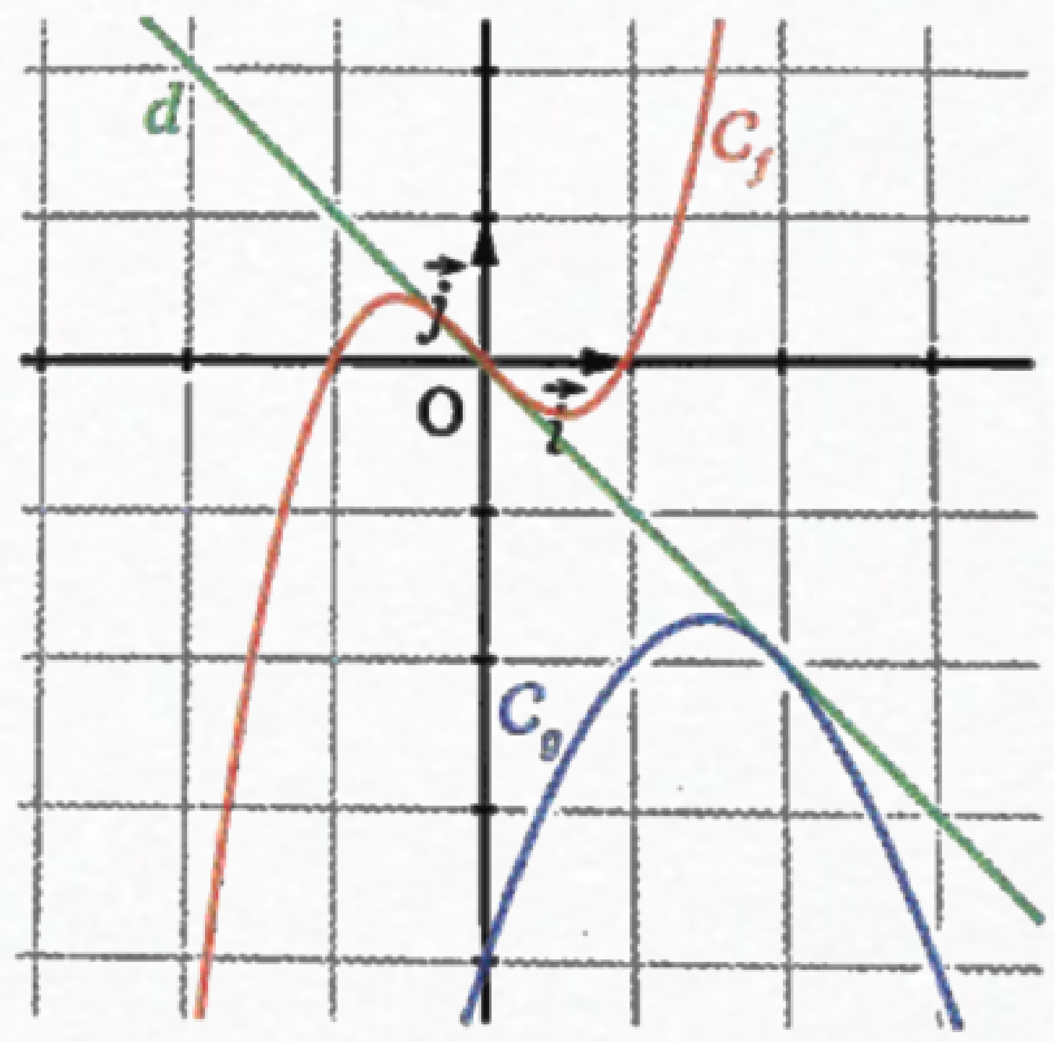


1. Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune T en A.

2. Donner l'équation réduite de la tangente T et la tracer après avoir reproduit le repère.

68 [Chercher.]

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 - x$ et $g(x) = -x^2 + 3x - 4$ et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note leur courbe représentative C_f et C_g. Soit d la tangente à la courbe C_f en O.



1. Déterminer l'équation réduite de la droite d.

2. Démontrer que d est aussi la tangente à la courbe C_g en un point A dont on déterminera les coordonnées.

69 [Communiquer.]

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-x-20$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d d'équation $y=3x+1$.

La courbe représentative de f admet-elle des tangentes parallèles à la droite d ? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

70 [Communiquer.]

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-4x$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d d'équation $y=-x+1$.

Démontrer que la courbe représentative de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d en des points que l'on déterminera.

72 [Raisonner.]

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On dit que la fonction carré f est convexe, car sa courbe représentative C_f est au-dessus de toutes ses tangentes.

1. Illustrer cette propriété à l'aide d'une figure.

2. Soit A un point de C_f d'abscisse a. On note T_a la tangente à C_f au point A.

a. Démontrer, à l'aide du taux de variation, que $f'(a)=2a$.

b. Donner l'équation réduite de T_a en fonction de a.

c. À l'aide d'une étude de signe, déterminer la position relative de C_f et T_a sur $\mathbb{R}$.

⚠ ×2

69 [Communiquer.]

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-x-20$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d d'équation $y=3x+1$.

La courbe représentative de f admet-elle des tangentes parallèles à la droite d ? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

70 [Communiquer.]

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-4x$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d d'équation $y=-x+1$.

Démontrer que la courbe représentative de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d en des points que l'on déterminera.

72 [Raisonner.]

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On dit que la fonction carré f est convexe, car sa courbe représentative C_f est au-dessus de toutes ses tangentes.

1. Illustrer cette propriété à l'aide d'une figure.

2. Soit A un point de C_f d'abscisse a. On note T_a la tangente à C_f au point A.

a. Démontrer, à l'aide du taux de variation, que $f'(a)=2a$.

b. Donner l'équation réduite de T_a en fonction de a.

c. À l'aide d'une étude de signe, déterminer la position relative de C_f et T_a sur $\mathbb{R}$.