ex1) La suite (u_n) est donnée par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$

1. Exprimer successivement :

a. v_{n+1} en fonction de u_{n+1}

b. v_{n+1} en fonction de u_n

c. u_n en fonction de v_n

d. v_{n+1} en fonction de v_n

2. Qu'en déduit-on sur la suite (v_n) ?

3. Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n.
En déduire u_n en fonction de n.

ex2) Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. Sur un tableur, faire afficher les 30 premiers termes de la suite (u_n), puis les 30 premières valeurs de $\dfrac{1}{u_n - 1}$.

2. a. Émettre une conjecture sur une expression de $\dfrac{1}{u_n - 1}$ en fonction de n.

b. En déduire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n et la tester sur le tableur.

3. Démonstration

On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis de u_n.

b. En déduire $v_{n+1} - v_n$.
Que peut-on en déduire ?

c. Déterminer v_n en fonction de n puis en déduire u_n.

ex3) Soit $u_0 = 3$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

ex4)

On injecte dans le sang d'un malade une dose de médicament. On suppose que ce médicament se répartit instantanément dans le sang et qu'il est ensuite éliminé progressivement, la concentration diminuant de 30 % chaque heure. On note c_n la concentration, en mg/L, n heures après l'injection ($n \in \mathbb{N}$). On donne $c_0 = 4$.

1. a. Calculer c_1, c_2, c_3.

b. Quelle est la nature de la suite (c_n) ?

c. En déduire l'expression de c_n en fonction de n.

d. Quelle est la concentration 18 h après l'injection ?

2. On souhaite maintenir la concentration du médicament au-dessus de 3 mg/L pendant 18 heures, et pour cela on pratique une heure après la première injection, puis toutes les heures, une injection de 1 mg/L du médicament. On note K_n la valeur de la concentration, n heures après l'injection ($n \in \mathbb{N}$).

a. Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $K_{n+1} = 0{,}7K_n + 1$.

b. Soit $d_n = K_n - \dfrac{10}{3}$. Démontrer que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique.

c. Déterminer d_n en fonction de n et en déduire K_n.

d. Quelle est la concentration du médicament 18 heures après l'injection ?

Besoin d'aide ?

1.a. Diminuer une quantité de 30 % c'est la multiplier par $\left(1 - \dfrac{30}{100}\right)$.

b. Comment passe-t-on de c_n à c_{n+1} ?

2.b. Montrer que $d_{n+1} = 0{,}7d_n$.

ex5) **Suites emmêlées**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et v_1, v_2.

2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que (d_n) est une suite géométrique.

b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

3. Soit $s_n = u_n + v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

a. Calculer s_0, s_1, s_2.

b. Montrer que $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?

4. En déduire u_n et v_n en fonction de n.

5. Déterminer en fonction de n
$U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.