Équations de droites - colinéarité

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$

1) Déterminer une équation de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

a) $A(1;5)$ et $B(-3;2)$

b) $A(4;2)$ et $B(4;-3)$

c) $A(2;-2)$ et $B(4;-2)$

La droite (AB) est une droite de vecteur $\vec{AB}$ passant par A.

a) Méthode 1 :

$\vec{AB}(-4; -3)$

$\boxed{(AB) : ax + by + c = 0 \text{ avec } \vec{AB}(-b; a)}$

$(AB) : -3x + 4y + c = 0$

$A \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient son équation : $-3\times1 + 4\times5 + c = 0$

$17 + c = 0$

$c = -17$

$(AB) : -3x + 4y - 17 = 0$

Méthode 2

La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

$\vec{AM}(x-1; y-5)$

$\vec{AB}(-4; -3)$

$(xy' - x'y = 0)$

$(AB) : (x-1)(-3) - (-4)(y-5) = 0$

$(AB) : -3x + 3 + 4y - 20 = 0$

$(AB) : -3x + 4y - 17 = 0$

b) $\vec{AB}(0; -5)$

$-b$, a

$(AB) : -5x - 0y + c = 0$

$A \in (AB) : -5\times4 + c = 0$

$c = 20$

$(AB) : -5x + 20 = 0$

$(AB) : x = \frac{-20}{-5} = 4$

$(AB) : x = 4$

on pouvait trouver ce résultat plus rapidement en remarquant que A et B avaient la même abscisse 4 et que (AB) est une droite verticale d'équation $x = 4$

c) Avec la remarque précédente, en constatant que les deux points ont la même abscisse -2, on trouve directement une équation de cette droite : $y = -2$

Sinon en utilisant la méthode 2, cette fois.

$\vec{AB}(2; 0)$

$\vec{AM}(x-2; y+2)$

$(AB) : 2(y+2) - (x-2)\times0 = 0$

$(AB) : 2(y+2) = 0$

$(AB) : y + 2 = 0$

$(AB) : y = -2$

2) La droite (d) a pour équation : $2x-5y+5=0$

1a) Donner un vecteur directeur de (d). Donner le coefficient directeur de (d).

b) quelle est son ordonnée à l'origine ?

En quel point coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

2) Le point A d'ordonnée $\frac{3}{2}$ est un point de (d). quelle est son abscisse ?

3) Le point $B(5;2)$ est-il est un point de (d) ?

4) Représenter (d).

1a) $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de

$d : ax+by+c=0$

ainsi $\vec{u}(5;2)$ est directeur de (d)

en divisant les coordonnées de $\vec{u}$ par 5 on obtient les coordonnées d'un vecteur directeur de (d) dont l'abscisse est 1 et dont l'ordonnée est donc le coefficient directeur de (d)

$\vec{u}' = \frac{1}{5}\vec{u}$ et $\vec{u}(1;\frac{2}{5})$

Donc le coefficient directeur de (d) est $\frac{2}{5}$.

b) L'ordonnée à l'origine s'obtient en remplaçant x par 0 : $2\times 0 - 5y + 5 = 0$

$-5y+5=0$ donc $y = \frac{-5}{-5} = 1$

L'ordonnée à l'origine est donc 1. Le point $J(0;1)$ appartient à (d).

c) L'abscisse de ce point (nommons le I) s'obtient en remplaçant y par 0 dans l'équation

$2\times x - 5\times 0 + 5 = 0$ | $x = \frac{-5}{2}$

$2x + 5 = 0$ | $I(-\frac{5}{2};0)$

2) $x_A = \frac{3}{2}$

$2\times\frac{3}{2} - 5y_A + 5 = 0$

$3 - 5y_A + 5 = 0$

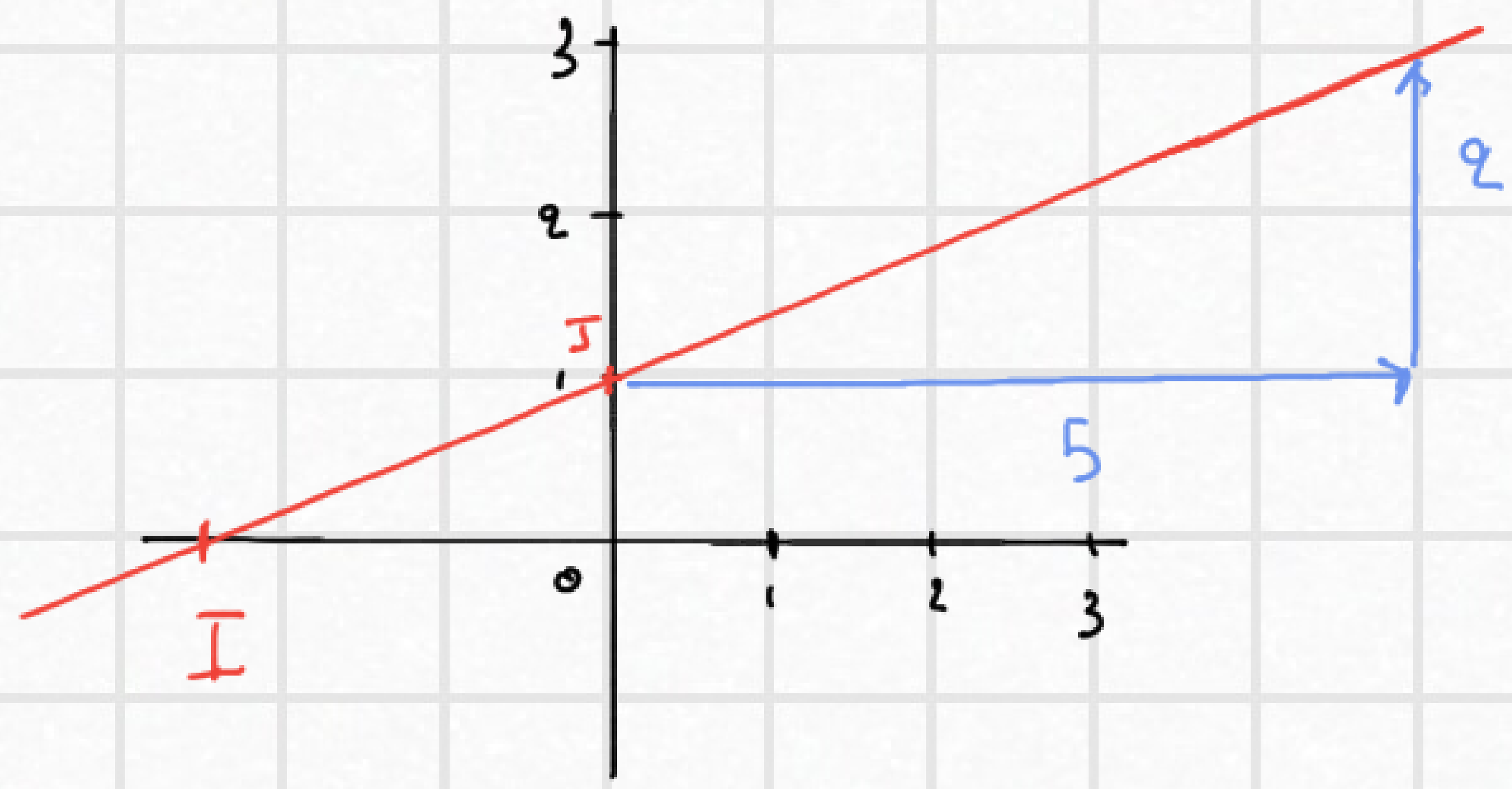
$-5y_A + 8 = 0$

$y_A = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$

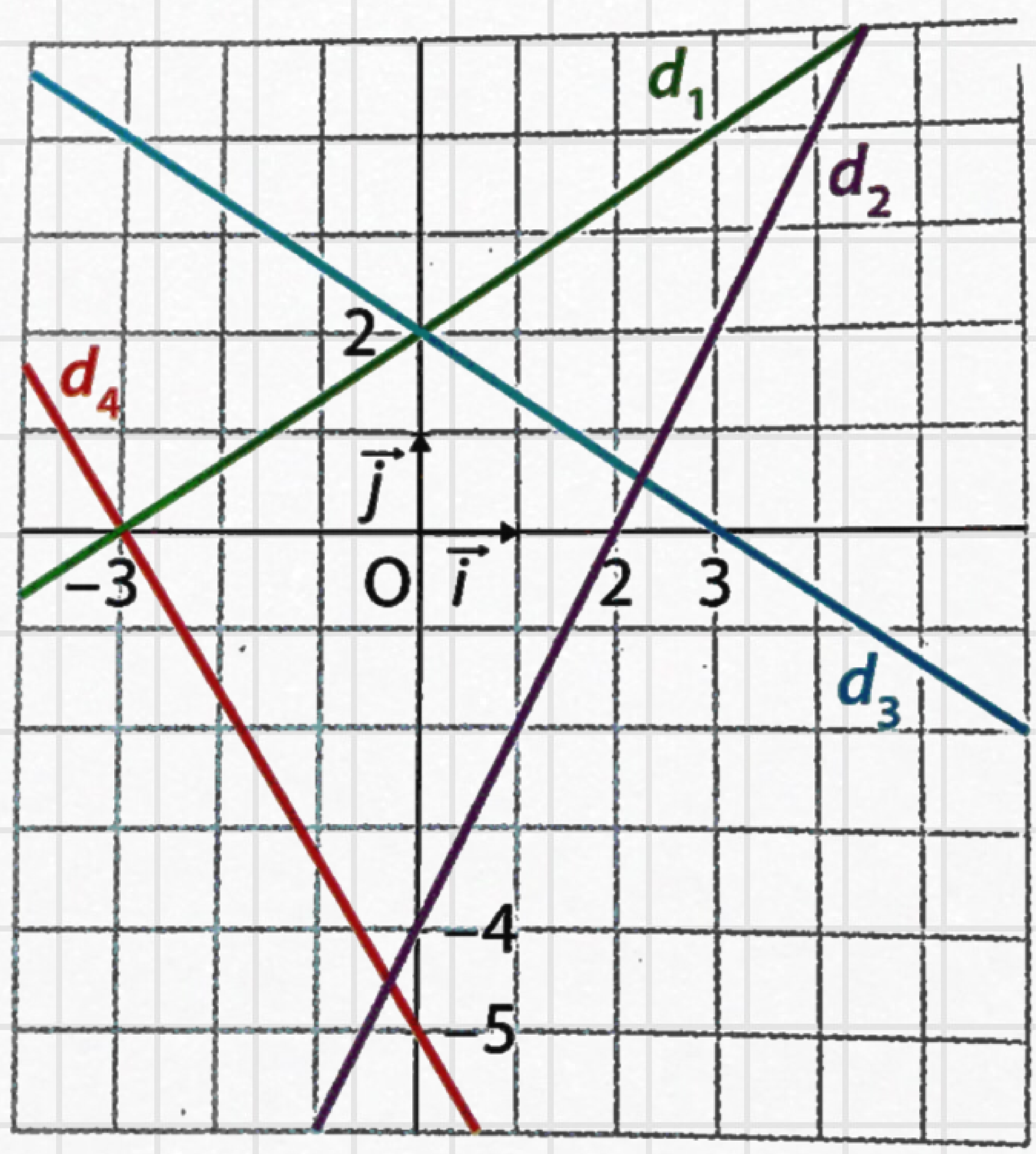
$A(\frac{3}{2};\frac{8}{5})$

3) $2\times 5 - 5\times 2 + 5 = 5 \neq 0$ donc $B \notin (d)$

4) Il suffit de placer deux points de cette droite, par exemple I et J.



3)



1) Quelle est la droite ayant pour équation $2x - y - 4 = 0$

2) Trouver une équation de chacune des trois autres.

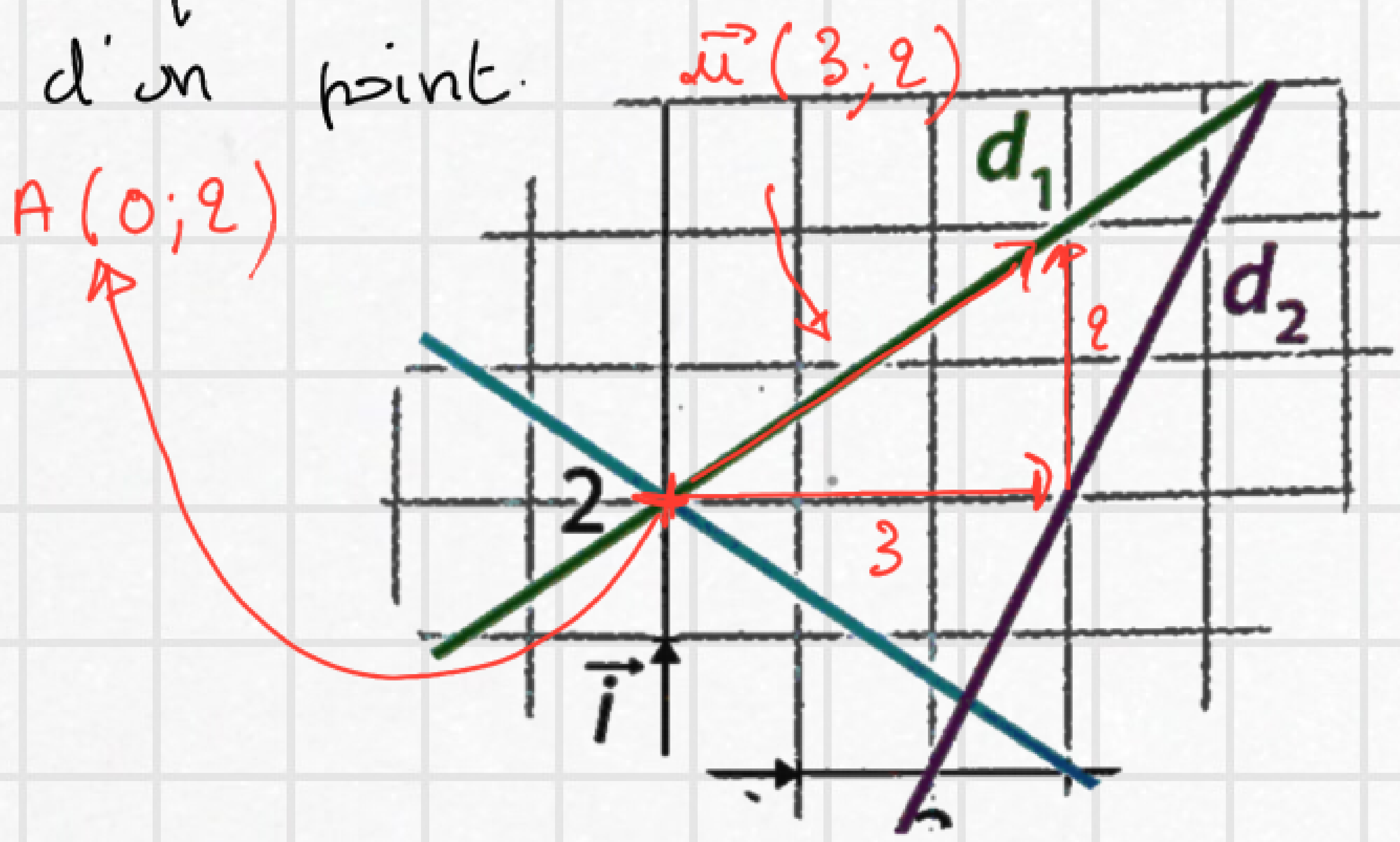
1) Si $x = 0$ alors $2\times 0 - y - 4 = 0$ et donc $y = -4$

Seule d_2 a pour ordonnée à l'origine -4. c'est une équation de d_2.

Nous pouvons vérifier avec un autre point. si $y = 0$ alors $2x - 0 - 4 = 0$ donc $x = 2$. $(0;2) \in d_2$

2) Equation de d_1 :

Il suffit d'un vecteur directeur et d'un point.



$d_1 : 2x - 3y + c = 0$

$A \in d_1 : 2\times 0 - 3\times 2 + c = 0$

$c = 6$

$\underline{d_1 : 2x - 3y + 6 = 0}$

Equation de d_3 :

$\vec{v}(3;-2)$ $A(0;2)$

$d_3 : -2x - 3y + c = 0$

$A \in d_3 : -2\times 0 - 3\times 2 + c = 0$

$c = 6$

$d_3 : -2x - 3y + 6 = 0$

$\underline{d_3 : 2x + 3y - 6 = 0}$

Equation de d_4 :

$\vec{w}(3;-5)$ $B(-3;0)$

$d_4 : -5x - 3y + c = 0$

$B \in d_4 : -5\times(-3) - 3\times 0 + c = 0$

$c = -15$

$d_4 : -5x - 3y - 15 = 0$

$\underline{d_4 : 5x + 3y + 15 = 0}$

4) Déterminer pour d_1 et d_2 un vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A.

a) $d_1 : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$

b) $d_2 : \frac{3}{4}x - 2y + \frac{7}{2} = 0$

a) $\boxed{ax + by + c = 0 \quad \vec{u}(-b;a)}$

$\vec{u}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ $A(0;2)$

b) $\vec{u}\left(2;\frac{3}{4}\right)$ $A\left(0;\frac{7}{4}\right)$

5) Les droites d et d' ont respectivement pour équation $7x - 3y + 2 = 0$ et $5x - 2y - 8 = 0$.

Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

Si oui déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs directeurs respectifs de d et d'

$\vec{u}(3;7)$ $\vec{u}'(2;5)$

Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires

or $3\times5-7\times2 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, d et d' sont sécantes en un point I dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} 7x-3y+2=0 & [I] \\ 5x-2y-8=0 & [II] \end{cases}$$

. A la calculatrice, on trouve $I(28;66)$

. A la main ; multiplions chacune des équation par un nombre permettant l'élimination d'une inconnue par addition membre à membre :

$[I]\times5$ et $[II]\times(-7)$ permettra d'obtenir des coefficients opposés sur l'inconnue x, ce qui permettra son élimination par addition :

$$\begin{cases} 35x-15y+10=0 \\ -35x+14y+56=0 \end{cases} \quad +$$

En additionnant membre à membre, on élimine "x"

$\cancel{35x}-15y+10\cancel{-35x}+14y+56=0+0$

$-y+66=0$ soit $y=66$

on obtient x en remplaçant y par 66 dans l'une des deux équations.

$7x-3\times66+2=0$

$x=\dfrac{3\times66-2}{7}=28$

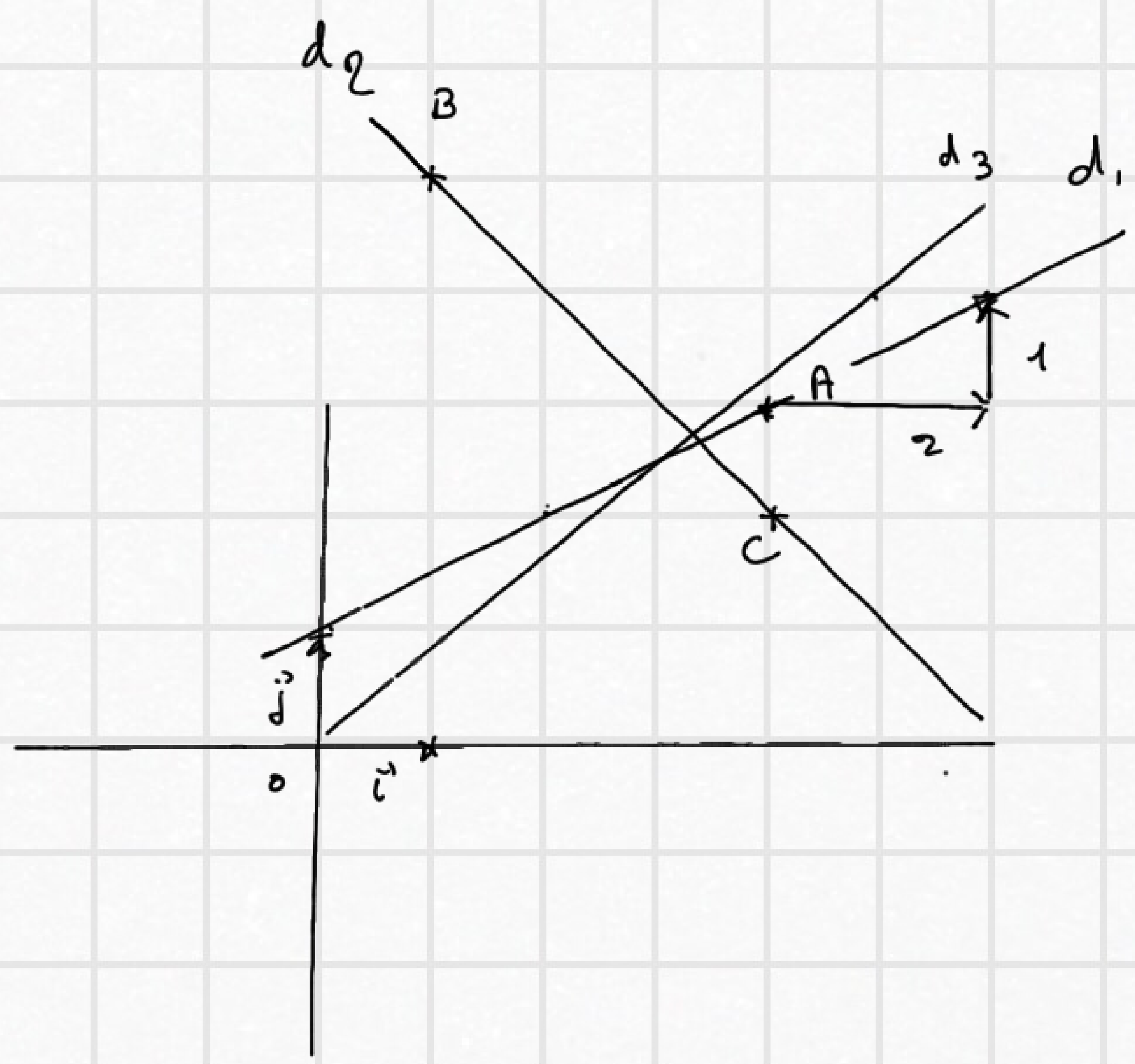
---

6) d_1 est la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2;1)$ passant par $A(4;3)$

d_2 est la droite passant par $B(1;5)$ et $C(4;2)$

d_3 passe par O, l'origine du repère et a pour coefficient directeur $\frac{4}{5}$.

Les droites d_1, d_2, d_3 sont-elles concourantes ?



Graphiquement, il semble que les droites ne soient pas concourantes (droites passant par un même point).

Mais c'est peut-être une imprécision du tracé. Démontrons le.

Déterminons une équation de chacune des droites :

$d_1 : \quad x - 2y + c = 0$

$A \in d_1 : 4 - 2(3) + c = 0$

$-2 + c = 0$

$c = 2$

$d_1 : x - 2y + 2 = 0$

$d_2 : \quad \overrightarrow{BC}(3 ; -3)$

$d_2 : -3x - 3y + c = 0$

$B \in d_2 : -3 \times 1 - 3 \times 5 + c = 0$

$c = +18$

$d_2 : -3x - 3y + 18 = 0$

$d_2 : \quad x + y - 6 = 0$

$d_3 : \quad y = \frac{4}{5} x$

Résolvons le système :

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} x - 2y + 2 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{array}} \ (S) \\ y = \frac{4}{5} x \quad [III] \end{cases}$$

Résolvons le sous-système (S) et remplaçons le couple solution dans [III].

En soustrayant membre à membre les équations de (S), on trouve y.

$\cancel{x} - 2y + 2 - \cancel{x} + y + 6 = 0$

$-y + 8 = 0$

$y = 8$

$x = 2y - 2 = 2 \times 8 - 2 = 14$

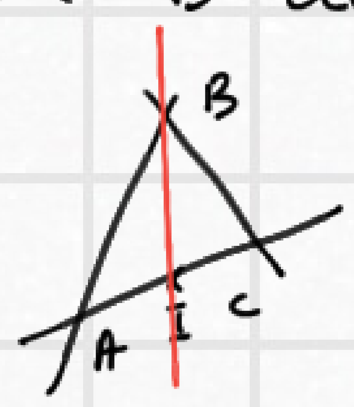
en remplaçant dans [III]

$\frac{4}{5} \times 14 = 8$ Faux

L'équation [III] n'est pas vérifiée par le couple solution de (S) donc les 3 droites d_1, d_2, et d_3 ne sont pas concourantes.

7) $A(2;3)$; $B(-2;1)$ et $C(1;-2)$

Trouver une équation de la médiane issue de B dans le triangle ABC.



Nommons I le milieu de [AC]. La médiane est la droite (BI).

$I\left(\frac{-2+1}{2} ; \frac{1-2}{2}\right) \quad I\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

La médiane est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{BI}$ passant par B :

$\overrightarrow{BI}\left(+\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$

$(BI) : -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + c = 0$

$B \in (BI) : -\frac{3}{2}(-2) - \frac{3}{2}(1) + c = 0$

$3 - \frac{3}{2} + c = 0$ donc $c = -\frac{3}{2}$

$(BI) : -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$

$(BI) : x + y + 1 = 0$

8) Pour quelle valeur du nombre m les droites (d) et (Δ) d'équations respectives $2x - 3y + 4 = 0$ et $mx - 2y + 2 = 0$ sont-elles parallèles ?

Nommons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs respectifs de (d) et de (Δ)

$\vec{u}(3;2)$ et $\vec{v}(2;m)$

(d) // (Δ) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $3m - 2 \times 2 = 0$

soit $m = \frac{4}{3}$.

Ainsi $\Delta : \frac{4}{3}x - 2y + 2 = 0$

9) Trouver une équation de la droite Δ passant par A(-1; 2) et parallèle à la droite (d) d'équation $3x - 2y + 1 = 0$

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d)

$\vec{u}(2;3)$

Δ // (d) donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d). De plus A ∈ d.

$(d) : 3x - 2y + c = 0$

$A \in d : 3(-1) - 2(2) + c = 0$

$: -7 + c = 0$

donc $c = 7$

$(d) : 3x - 2y + 7 = 0$

10) Dans chacun des cas dire si les droites (d) et (d') sont strictement parallèles, sécantes ou confondues.

a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x - 5y + 6 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x + 2y + 6 = 0 \\ 3x + \frac{3}{4}y - 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ \frac{1}{3}x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Nommons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de (d) et de (d').

a) $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(5;3)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $(1 \times 3 - 2 \times 5 \neq 0)$

donc (d) et (d') sont sécantes en I vérifiant : $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 & [I] \\ 3x - 5y + 6 = 0 & [II] \end{cases}$

Nous pouvons résoudre ce système par substitution [I] $y = 2x + 5$, de y dans [II].

$3x - 5(2x + 5) + 6 = 0$

$3x - 10x - 25 + 6 = 0$

$-7x = 19$

donc $x = -\frac{19}{7}$ et en remplaçant dans l'une des deux équations $y = -\frac{3}{7}$. $I\left(-\frac{19}{7}; -\frac{3}{7}\right)$

b) $\vec{u}\,(-2\,;8)$ $\quad \vec{v}\left(-\frac{3}{4}\,;3\right)$

$-2(3)-\left(-\frac{3}{4}\right)\times 8 = -6+6=0$ donc

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Déterminons si (d) et (d') sont confondues. Dans ce cas, tout point de l'une appartient à l'autre.

$A(0;-3) \in d$ mais $A \notin d'$ donc

(d) et (d') sont strictement parallèles.

c) En multipliant la 2ème equation par 3 on retrouve $x+3y-6=0$

ce qui est l'équation de (d).

Donc (d) et (d') sont confondues.

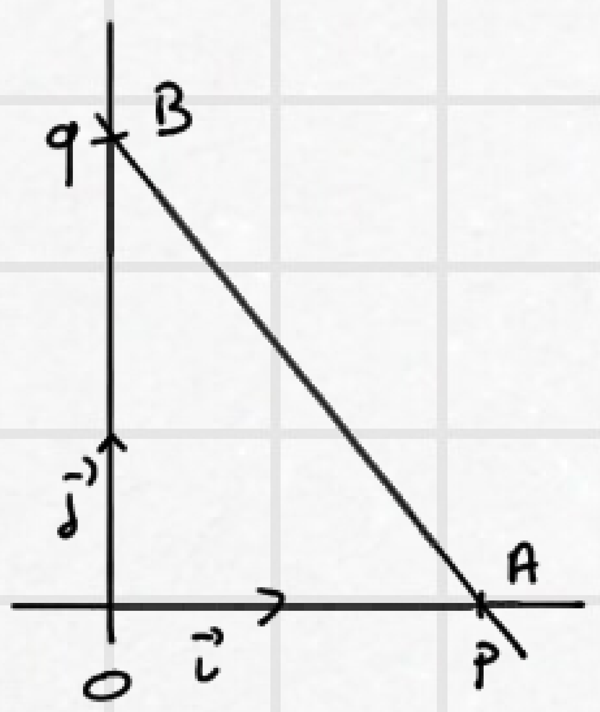
(on aurait aussi pu utiliser la stratégie du b))

---

11) $A(p\,;0)$ et $B(0\,;q)$ avec $p, q \in \mathbb{R}^*$

a) Démontrer qu'une équation de (AB) est $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0$

b) En déduire une équation de (CD) avec $C(-3\,;0)$ et $D(0\,;2)$



a) $\vec{AB}(-p\,;q)$

$(AB):\ qx+py+c=0$

or $A\in(AB)$ donc

$q\times p+p\times 0+c=0$

$c=-pq$

$(AB):\ qx+py-pq=0$

et en divisant cette équation par $pq\neq 0$

$(AB):\ \frac{q}{pq}x+\frac{p}{pq}y-\frac{pq}{pq}=0$

$(AB):\ \frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y-1=0$

b) $(CD):\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-1=0$

Nous avons utilisé le résultat précédent avec $p=3$ et $q=-2$

---

11) ABCD est un trapèze tel que (AB) est parallèle à (CD).
Soit M le point d'intersection des droites (AD) et (BC).
Soit I le milieu du côté [AB] et J le milieu du côté [CD].
On nomme K le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].
On veut démontrer que M, I, J, K sont alignés.

1. a. Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est un repère.

b. Donner les coordonnées de A, B, D et I dans ce repère.

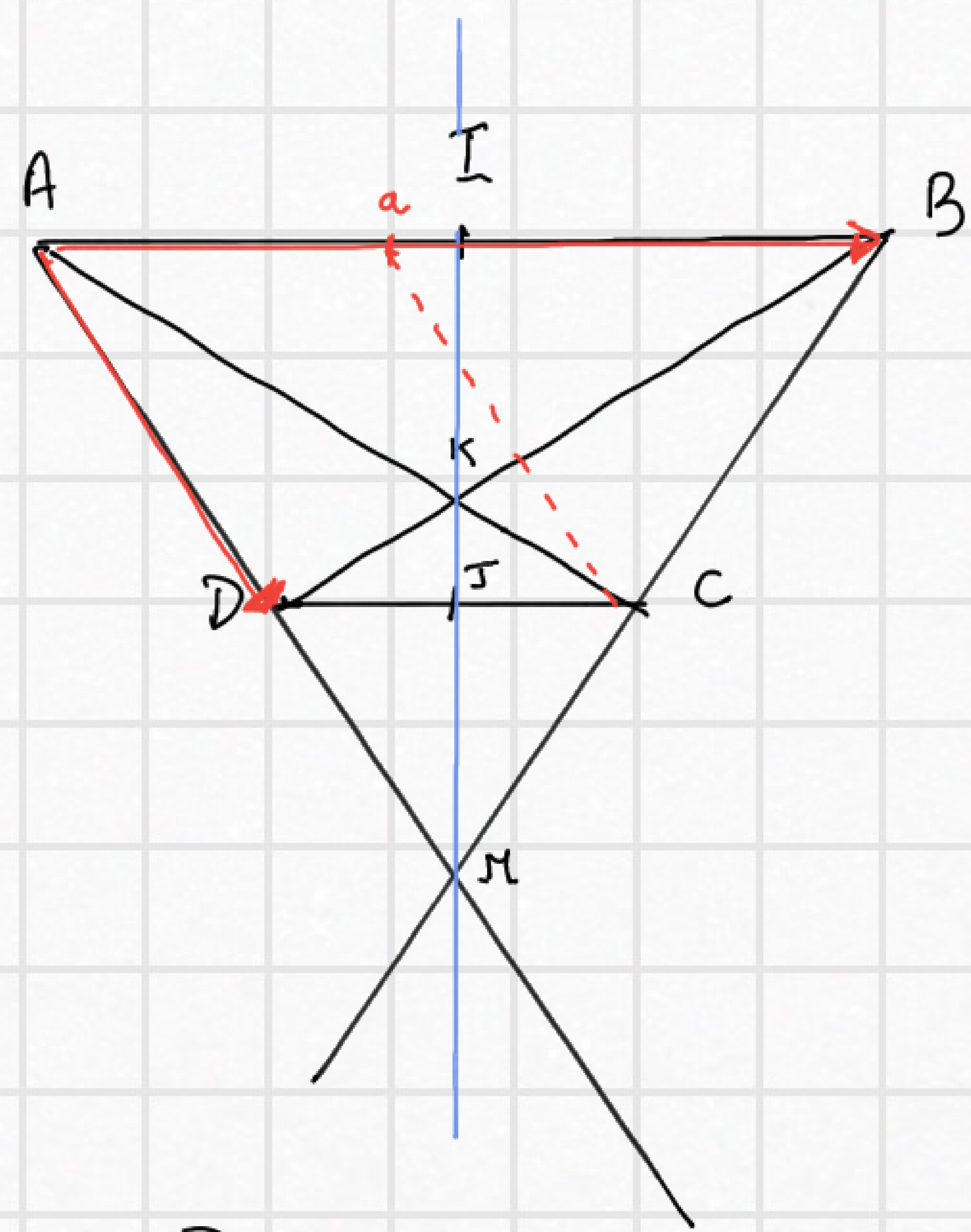
c. On nomme *a* l'abscisse du point C dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.
Déterminer, en fonction de *a*, les coordonnées de C et de J.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) et en déduire les coordonnées de M.

3. Montrer que les points M, I, J sont alignés.

4. Déterminer une équation cartésienne de (BD) et de (AC). En déduire les coordonnées de K.

5. Conclure.



1) $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires donc $(A\,;\vec{AB}\,;\vec{AD})$ est un repère.

b) $A(0;0)$ $B(1;0)$ et $I(\frac{1}{2};0)$

c) $\vec{AC} = a\vec{AB} + 1\vec{AC}$

donc $C(a;1)$

$J(\frac{a}{2};1)$.

2) $\vec{BC}(a-1\ ;\ 1)$

(BC) : $1x - (a-1)y + c =$

or $B \in (BC)$:

$1\times1 - (a-1)\times 0 + c = 0$

$c = -1$

(BC) : $x + (1-a)y - 1 = 0$

$M \in (AD)$ donc $x_M = 0$

$0 + (1-a)y_M - 1 = 0$

$y_M = \frac{1}{1-a}$ $\quad M\left(0;\frac{1}{1-a}\right)$

3) Démontrons que $\vec{MI}$ et $\vec{MJ}$ sont colinéaires.

$\vec{MI}\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{1-a}\right)$

$\vec{MJ}\left(\frac{a}{2}\ ;\ 1-\frac{1}{1-a}\right)$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1-a}\right) - \left(\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{1}{1-a}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1-a-1}{1-a}\right) + \frac{a}{2(1-a)} =$

$\frac{-a}{2(1-a)} + \frac{a}{2(1-a)} = 0$

donc $\vec{MI}$ et $\vec{MJ}$ sont colinéaires et donc M, I et J sont alignés.

4) $\vec{AC}(a;1)$

(AC) est la droite de coefficient directeur $\frac{1}{a}$ (Il suffit de diviser les coordonnées de $\vec{AC}$ par a pour obtenir $\vec{u}(1;\frac{1}{a})$) et passant par $A(0;0)$

donc (AC) : $y = \frac{1}{a}x$

$\vec{BD}(-1\ ;\ 1)$

(BD) : $x + y + c = 0$

$B \in (BD)$: $1 + 0 + c = 0$

donc $c = -1$

(BD) : $x + y - 1 = 0$

K : $\begin{cases} y = \frac{1}{a}x \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

$$x + \frac{1}{a}x - 1 = 0$$

$$x\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1$$

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{a+1}{a}}$$

$$x = \frac{a}{a+1}$$

$$y = \frac{1}{a}x = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right) = \frac{1}{a+1}$$

$$K\left(\frac{a}{a+1} ; \frac{1}{a+1}\right)$$

$$\overrightarrow{IK}\left(\frac{a}{a+1} - \frac{1}{2} ; \frac{1}{a+1}\right)$$

$$\overrightarrow{MI}\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{1-a}\right)$$

$$\left(\frac{a}{a+1} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{1-a}\right) - \frac{1}{2(a+1)} =$$

$$\frac{2a - a - 1}{2(a+1)(1-a)} \times (-1) - \frac{1}{2(a+1)} =$$

$$\frac{1-a}{2(a+1)(1-a)} - \frac{(1-a)}{2(a+1)(1-a)} = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires donc M, I et K sont alignés et par conséquent M, I, J, et K sont alignés.