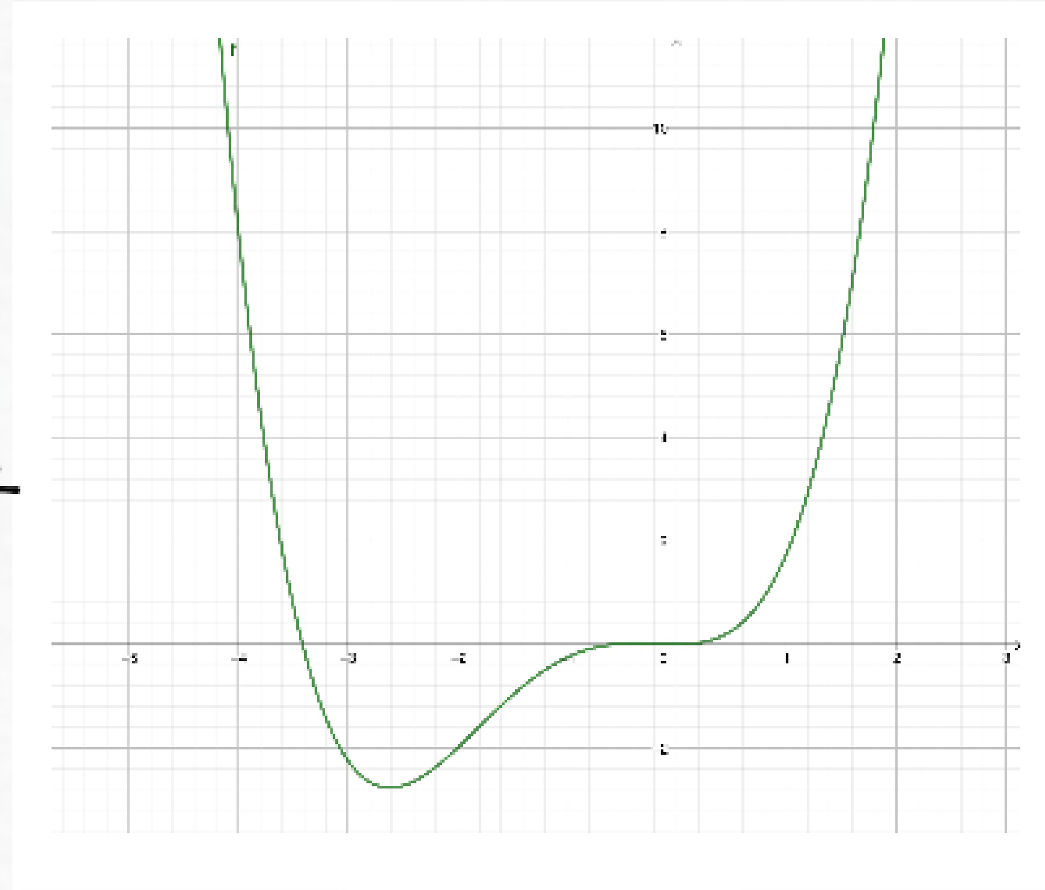
Dérivées et tangentes

1) La courbe ci-contre est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2$$



a) En combien de points la courbe semble-t-elle avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

b) Trouver la valeur exacte des abscisses de ces points.

1a) Pour déterminer le nombre de points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisse, déterminons le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$

$$f'(x) = x^3 + 3x^2 + x = x(x^2 + 3x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \iff x(x^2 + 3x + 1) = 0$$

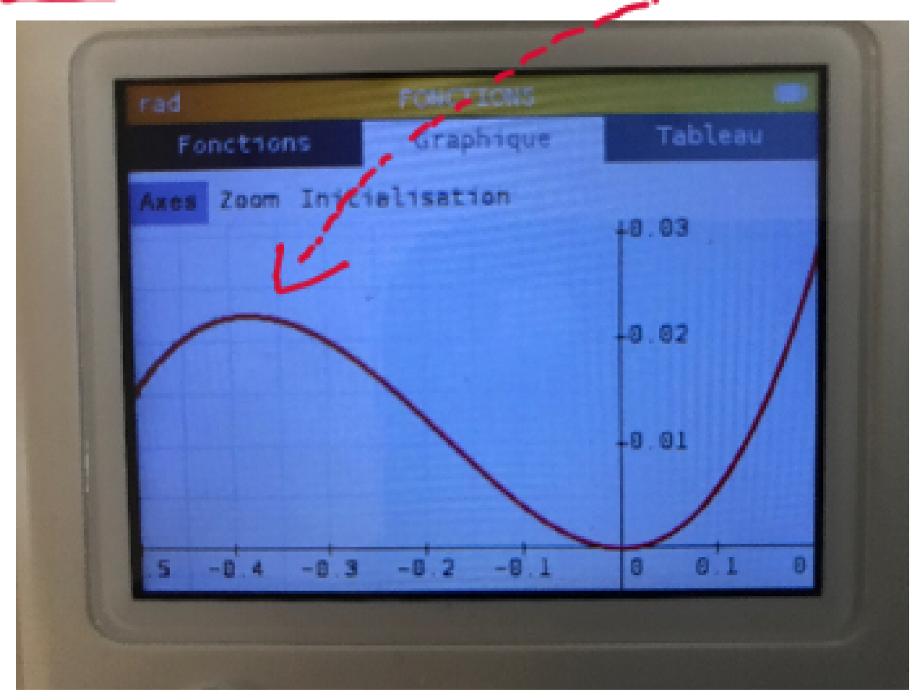
Cette équation possède 3 solutions

$x = 0$ et les 2 solutions de $x^2 + 3x + 1 = 0$ soit $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

1b) Les abscisses des points de la courbe où la tangente est horizontale sont :

- $x = 0$. La tangente passe par l'origine du repère et est confondue avec l'axe des abscisses.
- $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \simeq -2{,}6$
- $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}38$

ZOOM



---

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$. $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.

a) Quels sont les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$

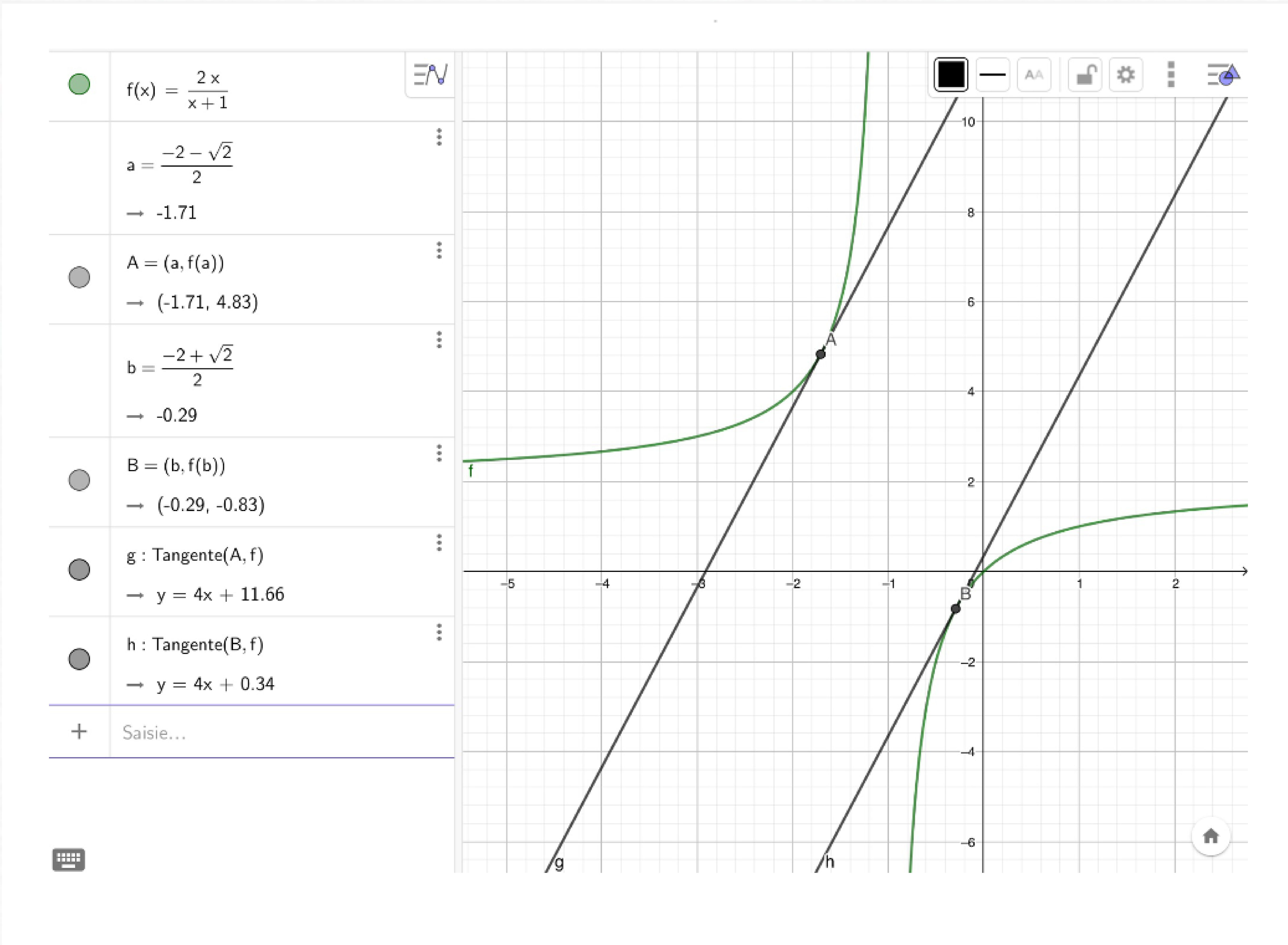
b) Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point $A(0;1)$?

2a) Déterminer les abscisses des points de la courbe où le coefficient directeur de la tangente est 4 revient à résoudre l'équation $f'(x) = 4$.

Calculons $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 4 \iff \frac{2}{(x+1)^2} = 4 \iff \frac{2}{4} = (x+1)^2 \iff \frac{1}{2} = x^2 + 2x + 1$

Soit $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$. Cette équation possède 2 solutions $x = -\frac{2-\sqrt{2}}{2} \simeq -1,7$ et $x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \simeq -0,29$. Il existe donc 2 points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$: $A\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2} ; f\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ et $B\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2} ; f\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.



2a) Le point $A(0;1)$ n'est pas un point de la courbe. Il faut donc déterminer l'équation d'une tangente en un point de la courbe d'abscisse a quelconque et déterminer s'il existe des tangentes passant par le point A en remplaçant ses coordonnées dans cette équation.

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$T_a : y = \frac{2}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+1}$

Remplaçons maintenant les coordonnées de A dans cette équation : $T_a : y = \frac{2}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+1}$

$$A \in T_a \iff 1 = \frac{2}{(a+1)^2}(0-a) + \frac{2a}{a+1} \iff 1 = \frac{-2a}{(a+1)^2} + \frac{2a}{a+1}$$

on réduit au même dénominateur : $\frac{(a+1)^2}{(a+1)^2} = \frac{-2a}{(a+1)^2} + \frac{2a(a+1)}{(a+1)^2}$

on simplifie les dénominateurs pour $a \neq -1$

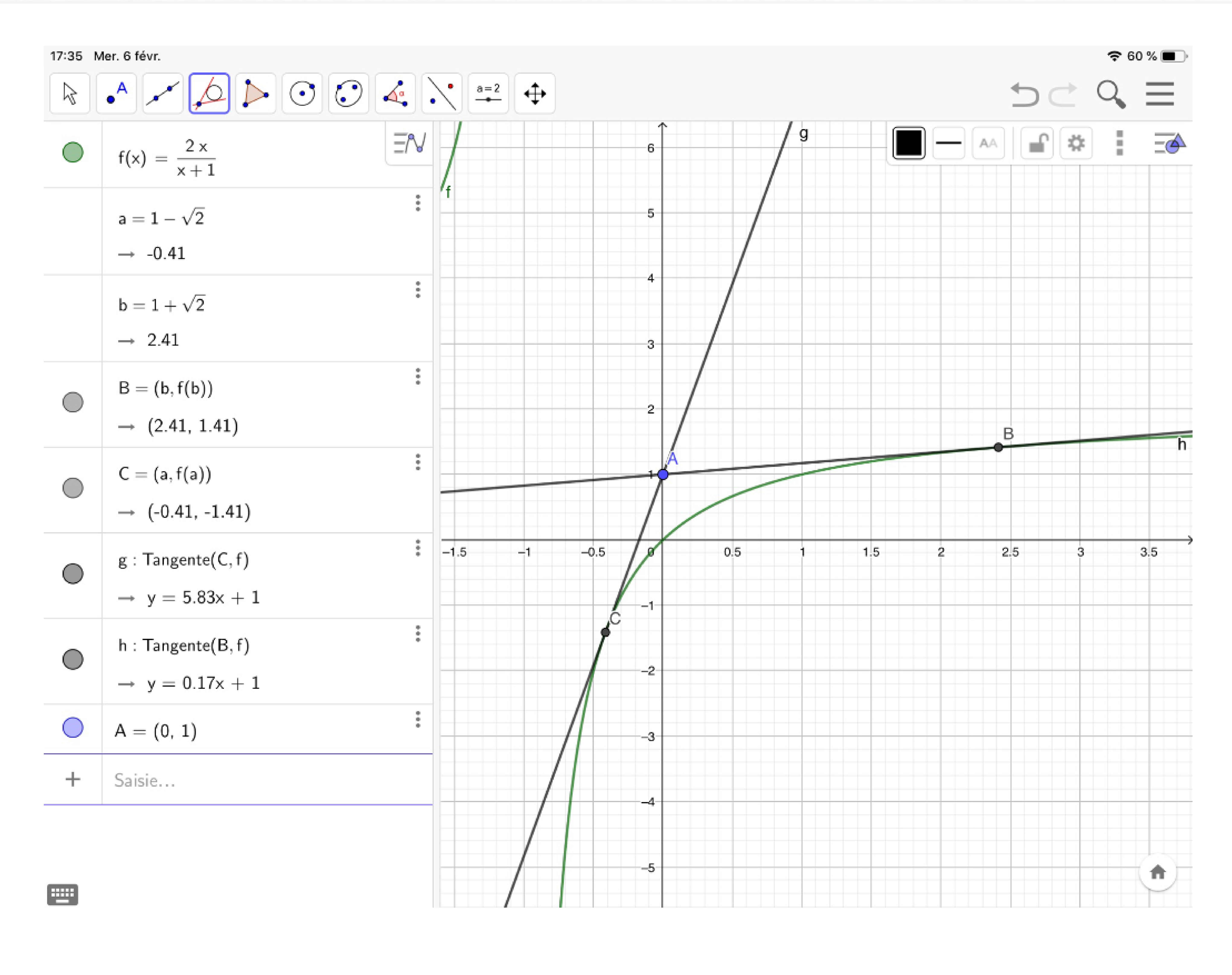
$$(a+1)^2 = -2a + 2a(a+1)$$

$$a^2 + 2a + 1 + 2a - 2a^2 - 2a = 0$$

$$-a^2 + 2a + 1 = 0$$

Cette équation possède 2 solutions $\begin{cases} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{cases}$.

Il existe donc 2 points de $\mathcal{C}$ et donc 2 tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $A(0; 1)$



3) On a obtenu la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$ et la tangente T à cette courbe au point $A(-1;0)$.

Cette droite semble être tangente à la courbe en un second point. Démontrer-le.

Déterminons le coefficient directeur de cette tangente.

$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$ donc $f'(-1) = -4(-1)^3 + 4(-1) + 1 = \underline{1}$

Résolvons l'équation $f'(x) = \underline{1}$ pour déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur 1.

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0$

$4x(-x^2+1) = 0$. Cette équation possède 3 solutions $x = 0$; $x = -1$ (A) et $x = 1$.

Déterminons une équation de la tangente en A :

$T_A : y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

$T_A : y = 1(x+1) + 0$

$T_A : y = x + 1$

Remplaçons les abscisses $x = 0$ et $x = 1$ dans cette équation afin de déterminer si le point associé appartient à $\mathcal{C}$

$(0;1) \notin \mathcal{C}$

$(1;2) \in \mathcal{C}$. Le second point cherché a donc pour coordonnées $(1;2)$.

---

4) **1.** On considère la fonction polynome f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

a) Donnez l'expression de $f'(x)$.

b) Déterminez l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f, au point d'abscisse 0. Vérifiez à l'aide de votre calculatrice.

2. Faites de même avec la fonction polynôme :

$$g : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 3x + 2.$$

3. Que remarquez-vous concernant l'équation réduite de la tangente au point $(0;\ g(0))$? Éventuellement, recommencez avec une ou plusieurs fonctions polynômes de votre choix.

4. a, b, c et d sont quatre nombres réels ($a \neq 0$). P est la fonction polynome définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a) Calculez P(0) et P'(0).

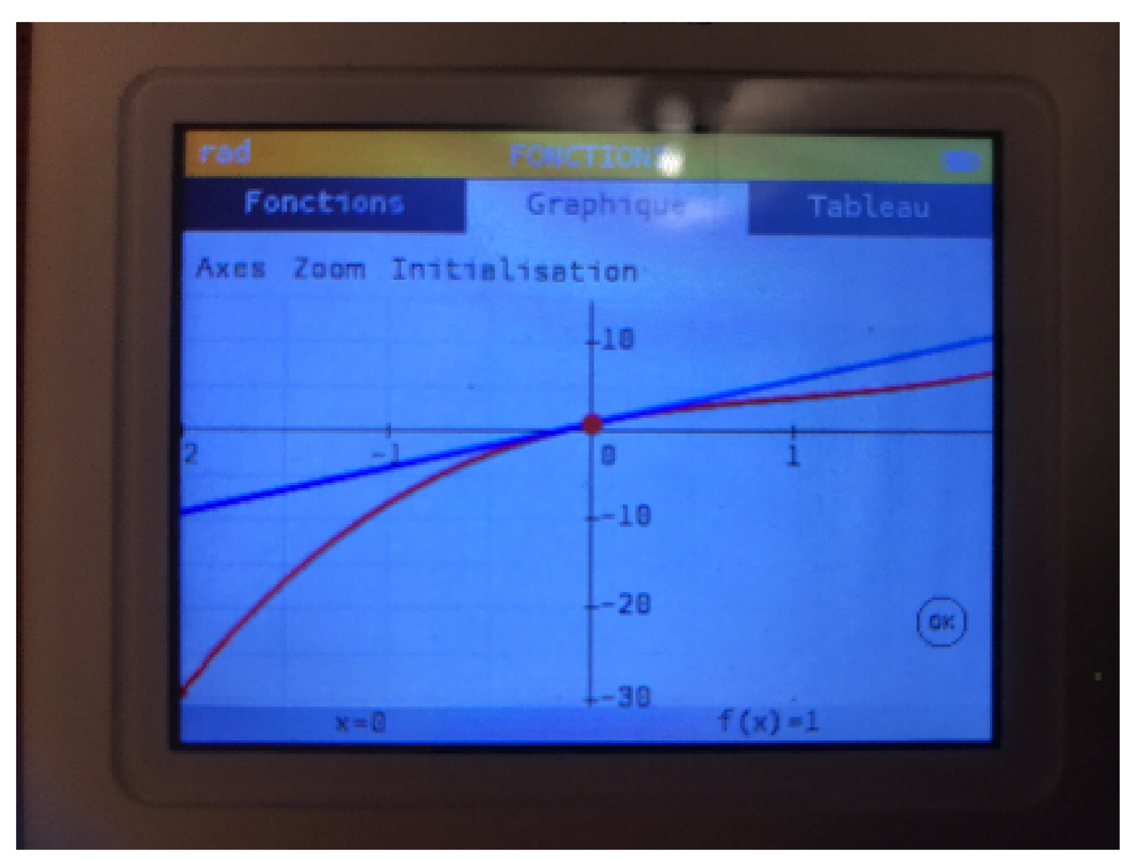
b) Déterminez l'équation réduite de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_P$ représentative de P au point d'abscisse 0. Énoncez la propriété établie.

1a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

b) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 5$

$T_0 : y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$T_0 : y = 5x + 1$



2) $g'(x) = 3x^2 - 4x - 3$

$g(0) = 2$ et $g'(0) = -3$

$T_0 : y = g'(0)(x-0) + g(0)$

$T_0 : y = -3x + 2$

3) Il semble que l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0

ait pour équation réduite $y = mx + p$ où m et p sont respectivement le coefficient des "x" et p la constante présents dans l'expression de la fonction.

4) $P(x) = ax^3 + bx^2 + \underline{cx + d}$ $\qquad P(0) = d$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad P'(0) = c$

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = P'(0) \times (x - 0) + P(0)$ soit $y = \underline{cx + d}$.

On retrouve bien la généralisation de la conjecture précédente.

---

5) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où a, b, c et d sont des nombres.

On connaît son tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	5	↘	1	↗	

1. a) À l'aide des renseignements portés dans ce tableau, montrez que a, b, c et d sont solutions du système :

$$\begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 5 \end{cases}$$

b) Déduisez-en $f(x)$.

2. a) Déterminez une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse 1.

b) Quel est le point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à T ?

3. a) La proposition suivante est-elle vraie :

« si $x \geqslant -3$, alors $f(x) > 0$ » ?

b) La réciproque de cette proposition est fausse. Trouvez un contre-exemple.

1a) A partir du tableau, on tire 4 informations :

$\begin{cases} \bullet\ f(-2) = 5 & \bullet\ f'(-2) = 0 \\ \bullet\ f(0) = 1 & \bullet\ f'(0) = 0 \end{cases}$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Utilisons les expressions de f et de f' pour établir les égalités proposées.

• $f(-2) = 5 \iff a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 5$

soit $\underline{-8a + 4b - 2c + d = 5}$

• $f(0) = 1 \iff a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 1$

soit $\underline{d = 1}$

• $f'(-2) = 0 \iff 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0$

soit $\underline{12a - 4b + c = 0}$

• $f'(0) = 0 \iff 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0$

soit $\underline{c = 0}$

On retrouve bien les 4 équations du système proposé.

b) En remplaçant $d = 1$ et $c = 0$ dans les 2 autres équations on obtient : $\begin{cases} 12a - 4b = 0 \\ -8a + 4b = 4 \end{cases}$

En additionnant membre à membre, on élimine b : $4a = 4$ donc $a = 1$ et ainsi $b = 3$.

On obtient ainsi $f(x) = 1x^3 + 3x^2 + 0x + 1$

et donc $\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 + 1}$. (Vérifier que f convient avec la calculatrice)

2a) $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f(1) = 5$

et $f'(x) = 3x^2 + 6x$ et donc $f'(1) = 9$

$T_1 : y = 9(x-1) + 5$ soit $\underline{T_1 : y = 9x - 4}$

b) $f'(x) = 9 \iff 3x^2 + 6x = 9 \iff x^2 + 2x - 3 = 0$

Cette equation possède 2 solutions $x = 1$ et $x = -3$

Au point $A(-3 ; f(-3))$, la tangente est parallèle à T.

avec $f(-3) = 1$.

3) $f(-3) = 1$. Donc sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$,

d'après le tableau des variations de f, f atteind son minimum 1 en 2 valeurs : $x = -3$ et $x = 0$.

Ainsi pour tout $x \geqslant -3$, $f(x) \geqslant 1 > 0$.

La proposition est donc vraie : "Pour tout $x \geqslant -3$, $f(x) > 0$"

4) $f(-3{,}01) \simeq 0{,}9$ ainsi

$f(x) > 0$ mais $x < -3$. La réciproque :

"Si $f(x) > 0$ alors $x \geqslant -3$" est donc fausse, car il existe un x tel que cette proposition soit fausse (Contre-exemple).