DTL Suites numériques

Ex 1

Une agglomération urbaine réalise une étude sur l'augmentation dans les années prochaines de sa consommation d'eau.
En 2009, la consommation moyenne par habitant s'élève à 305 L par jour et on se place dans l'hypothèse où cette consommation augmente de 1,5 % chaque année.

a) Calculer les consommations moyennes par habitant en 2010 et en 2011.

b) On note u_n la consommation moyenne par habitant l'année $2009 + n$.
Démontrer que la suite u est géométrique.

c) En quelle année cette consommation dépassera-t-elle 350 L par jour ?

Ex 2

Jimmy a choisi de placer son épargne sur un compte dont le taux mensuel est 0,25 %. Il ajoute à la fin de chaque mois la somme de 50 €.
Le capital initial noté y_0 s'élève à 1 000 € et on note y_n le montant de l'épargne au bout de n mois.

1. a) Calculer y_1, y_2 et y_3. On arrondira les résultats au centime.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer y_{n+1} en fonction de y_n.

2. On considère la suite w définie pour tout entier naturel n par $w_n = y_n + 20\,000$.

a) Démontrer que la suite w est géométrique.

b) Exprimer w_n, puis y_n en fonction de n.

c) Calculer le capital acquis par Jimmy au bout de 2 ans.

ex5

Alexandre « le Grand »

On construit une suite de nombres générée par une relation de récurrence de la façon suivante :

- le premier terme de la suite est égal à 0 ;
- à partir d'un terme de la suite, on l'élève au carré, on ajoute 1, puis on prend la racine carrée de cette somme pour obtenir le terme suivant.

Alexandre affirme qu'il peut calculer n'importe quel terme de rang donné de la suite. Comment fait-il ?

ex6

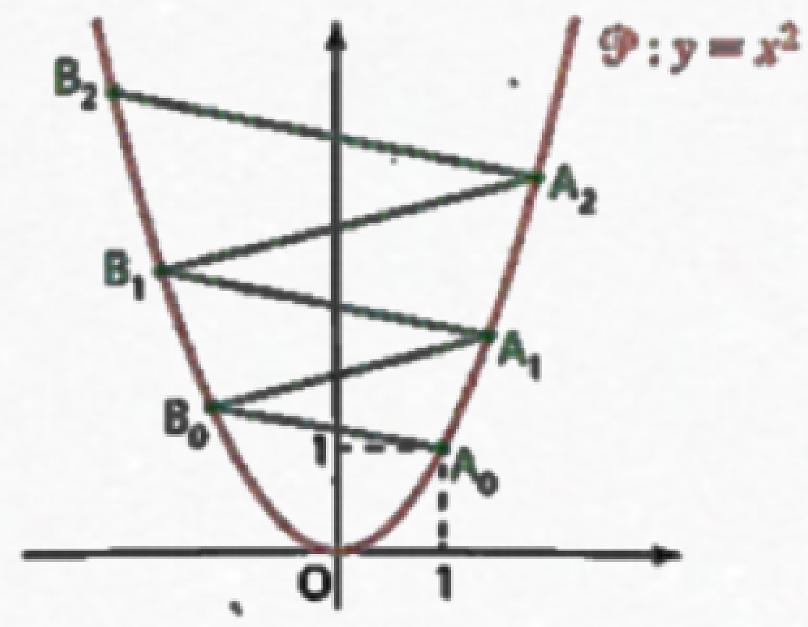
Fernando, la souris, le fromage

Fernando a stocké dans son grenier une réserve de petits cubes de fromage mais il s'aperçoit que son stock diminue. En effet, une souris a découvert sa réserve et, chaque jour, elle mange la moitié des petits cubes plus un qu'elle garde pour la nuit…
Au soir du 15ᵉ jour, il n'y a plus aucun cube de fromage. Combien de petits cubes Fernando avait-il stocké au départ dans sa réserve ?

Ex 9

Dans un repère, on note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.
A_0 est le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse 1, on construit les suites de points A_n et B_n appartenant à la parabole $\mathcal{P}$ de la façon suivante :

- les droites (A_nB_n) ont pour coefficient directeur $-\frac{1}{5}$;
- les droites $(A_{n+1}B_n)$ ont pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$.



Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse de A_n et b_n celle de B_n.

1. Calculer les coordonnées des points B_0 et A_1.

2. Plus généralement :

a) Exprimer le coefficient directeur :

- de la droite (A_nB_n) en fonction de a_n et b_n ;
- de la droite $(A_{n+1}B_n)$ en fonction de a_{n+1} et b_n.

b) En déduire que la suite (a_n) est arithmétique. Quelle est sa raison ?

c) Pour tout entier naturel n, exprimer a_n puis b_n en fonction de n.

d) Quelle est la nature de la suite (b_n) ?

Ex 3

Un vendeur propose à Valérie de régler son ordinateur de 690 € en trois versements mensuels.
Le premier versement aujourd'hui, le deuxième versement égal au premier versement augmenté de 5 % dans un mois et le troisième, égal au deuxième augmenté de 5 %, dans deux mois.
On note V_0, V_1 et V_2 les montants en euros de ces trois versements.

a) Démontrer que les trois versements sont en progression géométrique (c'est-à-dire trois termes consécutifs d'une suite géométrique). Préciser la raison q de la progression.

b) Exprimer $V_0 + V_1 + V_2$ en fonction V_0 et de q.

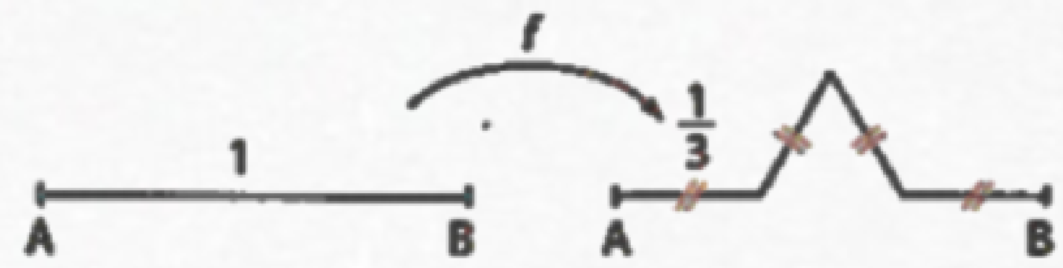
c) En déduire V_0, arrondi au centime.

d) Déterminer alors V_1 puis V_2, arrondis au centime.

ex4

Le flocon de Koch est une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté du triangle.

Description de la transformation



Le segment [AB] est transformé en une ligne brisée de quatre segments de longueur $\frac{1}{3}$.

1. Étude du nombre de côtés

Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$ on note C_n le nombre de segments qui constituent le flocon à l'étape n.

a) Donner les valeurs de C_1, C_2, C_3, C_4.

b) Démontrer que la suite $(C_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique.
Exprimer C_n en fonction de n.

2. Étude du périmètre

Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, on note u_n la longueur du segment à l'étape n.

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique.
Exprimer u_n en fonction de n.

b) Démontrer que le périmètre du flocon à l'étape n est donné par $p_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

3. Étude de l'aire

Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, on note a_n l'aire du flocon à l'étape n.

a) Calculer a_1.

b) De l'étape n à l'étape $n + 1$, l'aire est augmentée de celle des C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1}.
En déduire $a_{n+1} - a_n$ en fonction de n.

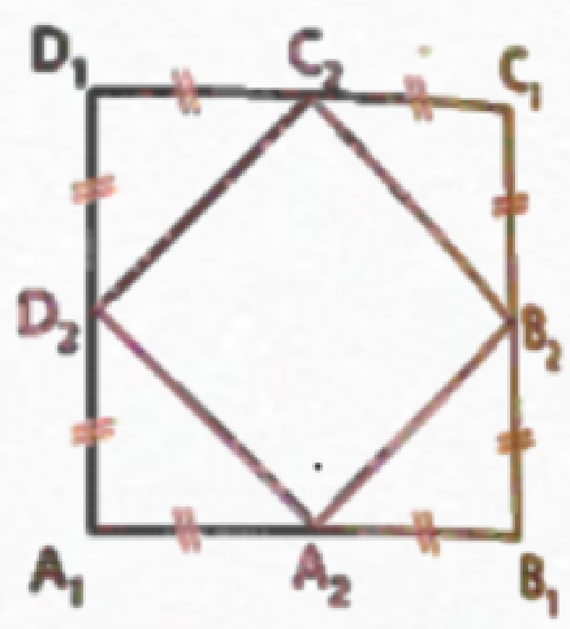
c) Calculer $(a_n - a_{n-1}) + \ldots + (a_2 - a_1)$ de deux façons différentes. En déduire la valeur de a_n pour $n \geqslant 2$.

d) Donner une valeur approchée de a_{50} arrondie au millième.

ex7

Des carrés emboîtés

$A_1B_1C_1D_1$ est un carré de côté égal à 10 cm.
On construit le carré $A_2B_2C_2D_2$ à partir des milieux des côtés du carré $A_1B_1C_1D_1$ comme le montre la figure ci-contre.



On poursuit ainsi la construction et on obtient une suite $(A_nB_nC_nD_n)$ de carrés emboîtés.
Combien de carrés faut-il construire pour que le périmètre du plus petit soit inférieur à 0,6 cm ?