# Exercices de probabilités conditionnelles

1) **Sur la glace**

Une patineuse participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Elle ne réussit le premier saut que dans 95 % des cas. Comme elle est émotive, si elle ne réussit pas ce premier saut, elle rate le deuxième 3 fois sur 10 ; sinon, si tout va bien lors du premier saut, elle réussit le deuxième dans 90 % des cas.

Soit $R_1$ l'événement : « la patineuse réussit le premier saut » et $R_2$ l'événement : « la patineuse réussit le deuxième saut ».

**1. a)** Quelle est la probabilité de l'événement $R_1$ ?

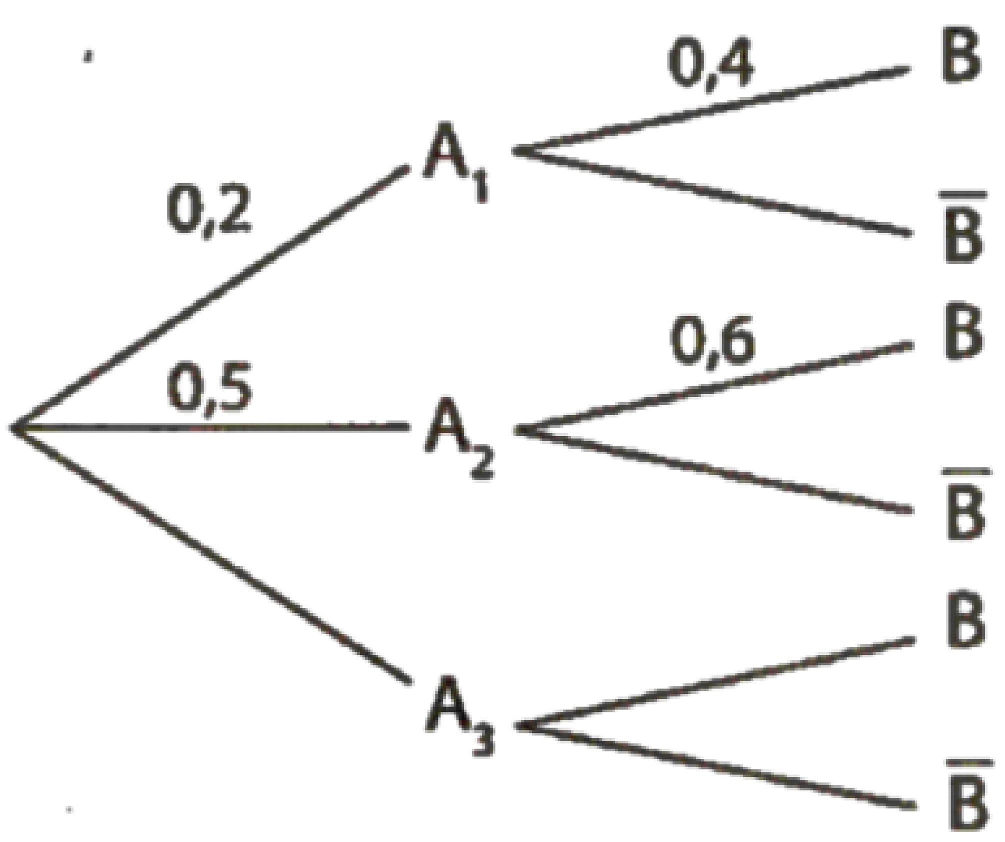
**b)** Calculez la probabilité de l'événement $R_2$ sachant que $R_1$ est réalisé.

**c)** Calculez la probabilité de l'événement $R_2$ sachant que $R_1$ n'est pas réalisé.

**2.** Déterminez la probabilité de l'événement : « la patineuse réussit les deux sauts ».

**3.** Calculez la probabilité de l'événement $R_2$.

2) Une situation aléatoire est modélisée par l'arbre ci-dessous.




On sait de plus que $p(B) = 0{,}44$.
Calculez $p_{A_3}(B)$.

3) **Aménagement d'intérieur**

Dans un programme de construction proposé par un promoteur immobilier, les acquéreurs doivent choisir entre la pose de moquette, de carrelage ou de sol plastifié pour revêtir le sol du salon. Pour le revêtement des murs du salon, ils ont le choix entre peinture ou papier peint.

Le recueil des choix des acquéreurs par l'entreprise donne les résultats suivants :

- 20 % ont choisi la moquette ;
- 50 % ont choisi le carrelage ;
- les autres acquéreurs ont choisi la pose de sol plastifié.

Parmi les acquéreurs ayant choisi la moquette, 46 % choisissent le papier peint pour le revêtement des murs.
Parmi les acquéreurs ayant choisi le carrelage, 52 % choisissent le papier peint pour le revêtement des murs.
42,7 % des acquéreurs ont choisi le papier peint pour le revêtement des murs.

On interroge au hasard l'acquéreur d'un logement construit par cette entreprise.
On considère les événements suivants :
M : « l'acquéreur a choisi la moquette » ;
C : « l'acquéreur a choisi le carrelage » ;
S : « l'acquéreur a choisi le sol plastifié » ;
P : « l'acquéreur a choisi le papier peint ».

**1.** Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

**2. a)** Décrivez l'événement $M \cap P$.

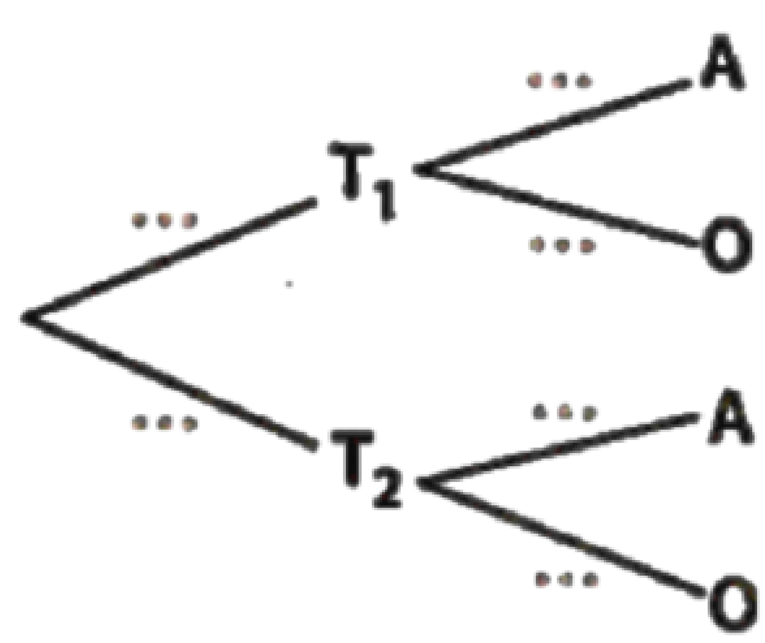
**b)** Calculez la probabilité $p(M \cap P)$.

**3. a)** Montrez que la probabilité que l'acquéreur ait choisi la pose de sol plastifié et de papier peint est égale à 0,075.

**b)** L'acquéreur a choisi le sol plastifié. Calculez la probabilité qu'il ait choisi le papier peint.

4) Un tiroir $T_1$ contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir $T_2$ contient quatre pièces d'or et six pièces d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

**1.** Recopiez puis complétez l'arbre pondéré qui représente cette expérience aléatoire.
Les événements considérés sont désignés de façon naturelle par $T_1$, $T_2$, O et A.




**2. a)** Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.

**b)** On a extrait une pièce d'or.
Quelle est la probabilité qu'elle provienne de $T_1$ ?

5) **Inégalité face à la maladie**

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2011.

Dans cette population :

- 58 % sont des femmes ;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable, appelée maladie $\mathcal{A}$, et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On note :

- F l'événement « la personne choisie est une femme » ;
- H l'événement « la personne choisie est un homme » ;
- A l'événement « la personne choisie est atteinte de la maladie $\mathcal{A}$ » ;
- $\overline{A}$ l'événement « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie $\mathcal{A}$ ».

**1. a)** Donnez la probabilité de l'événement F et celle de l'événement A.

Donnez la probabilité de l'événement F sachant que l'événement A est réalisé, notée $p_A(F)$.

**b)** Définissez par une phrase l'événement $A \cap F$, puis calculez sa probabilité.

**c)** Montrez que la probabilité de l'événement A sachant que F est réalisé est égale à 0,057 à $10^{-3}$ près.

**2.** La personne choisie est un homme. Démontrez que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie $\mathcal{A}$ est égale à 0,040 à $10^{-3}$ près.

**3.** Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2011, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie $\mathcal{A}$ qu'un homme ? Justifiez.

6) Une école d'ingénieurs organise la sélection de ses futurs étudiants de la manière suivante :

- après examen de leur dossier scolaire, 15 % des candidats sont admis directement ;
- tous les autres candidats passent une épreuve écrite dont le taux de réussite est estimé à 60 % ;
- tous les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont convoqués pour passer une épreuve orale. Ceux qui réussissent l'épreuve orale sont alors admis.

On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On choisit un candidat au hasard.

On considère les événements suivants :

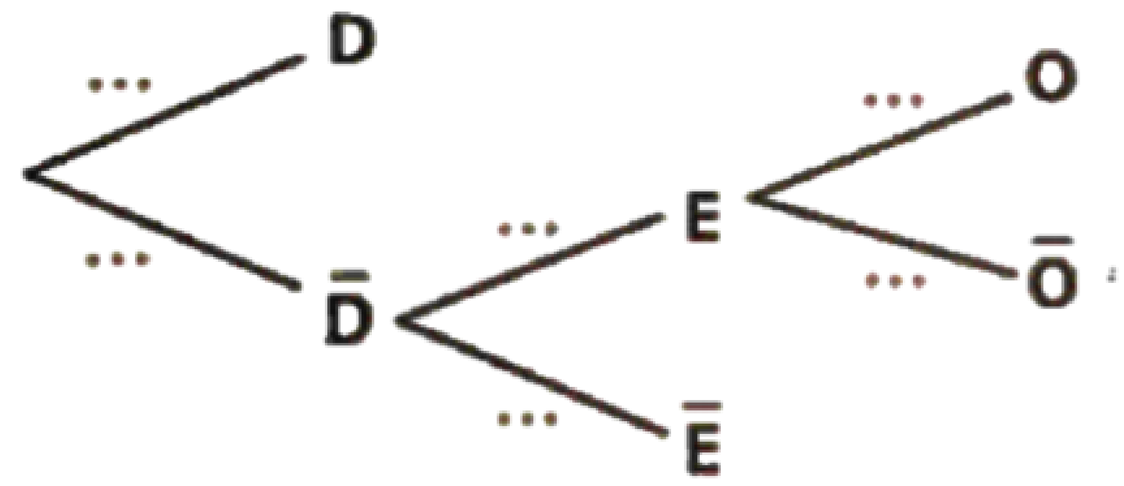
D : « Le candidat est admis sur dossier » ;

E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite » ;

O : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale » ;

A : « Le candidat est admis ».

**1.** Recopiez puis complétez l'arbre pondéré décrivant les différentes étapes de la sélection.




**2.** Calculez les probabilités P(E) et P(O).

**3.** Justifiez que la probabilité que le candidat soit admis est P(A) = 0,32.

**4.** Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de ceux qui ont été admis sur dossier ?

7) **Tel père, tel fils ?**

Lors d'une enquête réalisée auprès d'élèves de classes de Terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus, 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

**1.** On choisit un élève au hasard. On note A l'événement « l'élève choisi fume » et F l'événement « l'élève choisi est une fille ». Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit :

**a)** un garçon ?

**b)** une fille qui fume ?

**c)** un garçon qui fume ?

**2.** Déduisez des questions précédentes, en le justifiant, que $p(A) = 0,36$.

**3.** L'enquête permet de savoir que :

- parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement « l'élève choisi a des parents fumeurs ».

**a)** Calculez les probabilités $p(A \text{ et } B)$ et $p(\overline{A} \text{ et } B)$. Déduisez-en $p(B)$.

**b)** Calculez $p_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

Calculez $p_{\overline{B}}(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

8)

## Faut-il se faire vacciner ?

Le but de cet exercice est de vérifier l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée. On dispose des données suivantes :

- Un quart de la population a été vaccinée contre la maladie.
- Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a un vacciné sur treize parmi les malades.
- La probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il est vacciné est égale à 0,1.

Pour une personne rencontrée par hasard, on note :
M l'événement « être malade », $\overline{M}$ son contraire ;
V l'événement « être vacciné », $\overline{V}$ son contraire.

**1.** On rencontre par hasard une personne dans la population. Dessinez un arbre traduisant l'énoncé.

**2.** Calculez la probabilité de l'événement « M et V », notée $p(M \cap V)$. Déduisez-en que $p(M) = \frac{13}{40}$.

**3. a)** Calculez $p(M \cap \overline{V})$.

**b)** Déduisez-en $p_{\overline{V}}(M)$.

**4.** Déterminez le réel $k$ tel que $p_V(M) = kp_{\overline{V}}(M)$. Énoncez ce dernier résultat en langage courant.

9) Une entreprise dispose de deux machines, appelées machine A et machine B pour fabriquer le même type de pièces. Certaines des pièces produites sont défectueuses :

- pour la machine A, la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut est 0,9 ;
- pour la machine B, cette probabilité est 0,95.

La machine A fournit les deux tiers de la production, la machine B le tiers restant.
On choisit une pièce au hasard et on considère les événements :
E : « La pièce provient de la machine A » ;
F : « La pièce provient de la machine B » ;
S : « La pièce est sans défaut ».

**1.** Construire un arbre de probabilités pour représenter cette expérience aléatoire.

**2. a)** Calculer $P(S \cap E)$ et $P(S \cap F)$.

**b)** En déduire la probabilité que la pièce soit sans défaut.

**3.** Calculer la probabilité que la pièce provienne de la machine A sachant qu'elle est sans défaut.

10)

## Stress au travail

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs ; 65 % de son personnel travaille dans le secteur A et 35 % dans le secteur B.
Cette entreprise s'intéresse au niveau de stress de son personnel.
Une enquête, menée sous la forme d'un questionnaire informatisé, est réalisée au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur A, 20 % du personnel se dit stressé, tandis que, dans le secteur B, ce taux est de 30 %.
On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On note :

- A l'événement « le questionnaire est celui d'un employé du secteur A » ;
- B l'événement « le questionnaire est celui d'un employé du secteur B » ;
- S l'événement « le questionnaire est celui d'un employé stressé ».

**1.** Construisez un arbre pondéré décrivant la situation.

**2.** Calculez la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé.

**3.** L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25 %, cette salle sera installée.
L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifiez la réponse.

11) On dispose de deux urnes indiscernables $U_1$ et $U_2$. $U_1$ contient 7 jetons noirs et 5 jetons blancs, $U_2$ contient 3 jetons noirs et 5 jetons blancs. On choisit une urne au hasard et on tire un jeton dans cette urne.

**a)** Calculer la probabilité que le jeton soit blanc sachant qu'il provient de $U_1$.

**b)** Calculer de même la probabilité que le jeton soit blanc sachant qu'il provient de $U_2$.

**c)** En déduire la probabilité que le jeton soit blanc.

12) **Hérédité**

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.

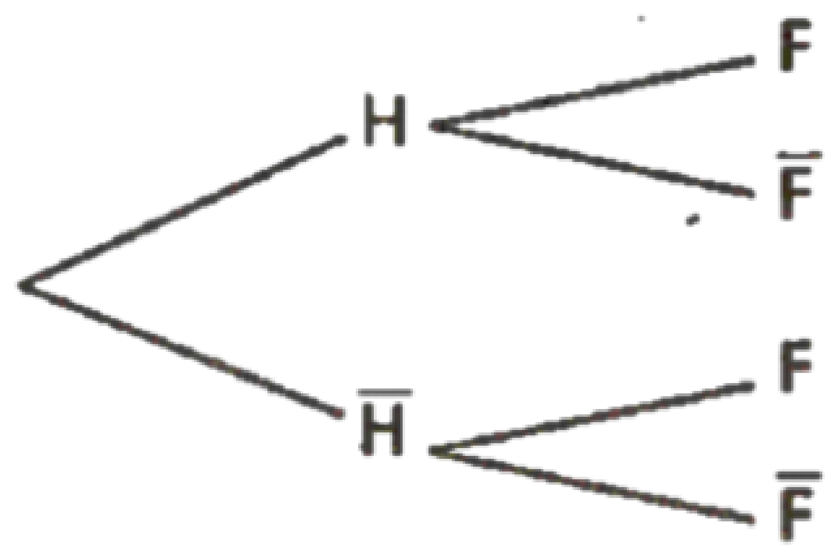
En France, les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4% des hommes et 5% des femmes sont asthmatiques.

Dans la population française, on considère un couple pris au hasard parmi l'ensemble des couples homme-femme.

## A Étude de l'asthme du couple

On note H l'événement : « L'homme est asthmatique », et F l'événement : « La femme est asthmatique ».

**1.** Recopiez et complétez l'arbre de probabilités ci-dessous.




**2.** On note les événements :

- $A_0$ « aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique » ;
- $A_1$ « un seul des deux adultes du couple est asthmatique » ;
- $A_2$ « les deux adultes du couple sont asthmatiques ».

Montrez que $p(A_0) = 0{,}912$.

Puis montrez que $p(A_1) = 0{,}086$, $p(A_2) = 0{,}002$.

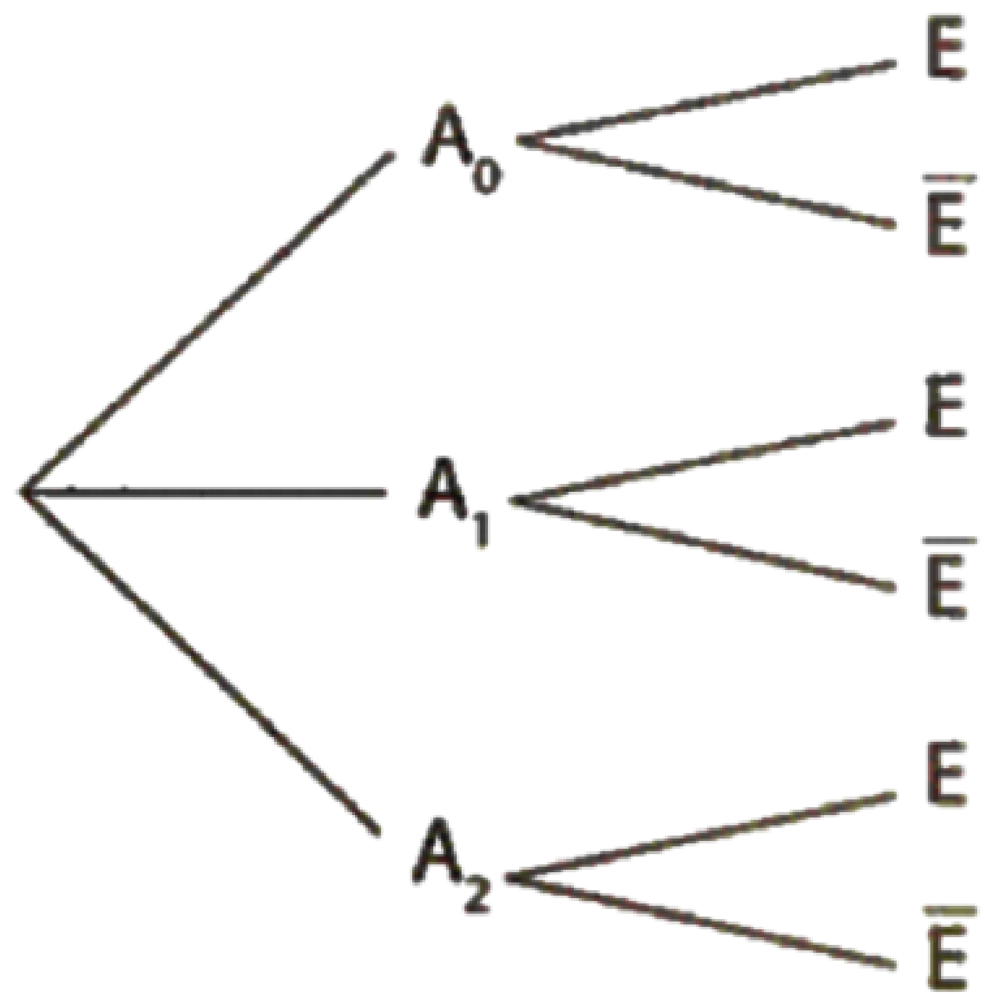
## B Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'événement « Le premier enfant du couple est asthmatique ».

**1.** Reproduisez sur votre copie puis complétez l'arbre de probabilités ci-dessous.




**2.** Montrez que $p(E) = 0{,}118$.

**3.** Calculez $p_E(A_0)$ et interprétez le résultat. Déduisez-en $p_E(\overline{A_0})$ et interprétez le résultat.

**4.** Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatique ?