Le second degré

1. Equations du second degré

1. Polynôme du 2nd degré

Définition 1 : La fonction qui à tout réel x associe $ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul est une fonction polynôme du second degré (ou trinôme du 2nd degré)
Les réels a, b, c sont les coefficients de ce polynôme.

2. Forme canonique

Propriété 1 : Pour toute fonction polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ il existe deux réels α et tels que $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
$a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique du polynôme $ax^2 + bx + c$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Démonstration :

Soit le polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
On a : $f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
On peut considérer que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de l'identité $(x + \frac{b}{2a})^2$
Ainsi $f(x) = a(x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2)$

$$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2)$$

$$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4\text{ac}}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2})$$

$$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4\text{ac}}{4a^2})$$

En notant le réel $\Delta = b^2 - 4\text{ac}$, on obtient $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (-\frac{\Delta}{4a})$.
Ainsi $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$et $\beta = \frac{-\Delta}{4a}$
On remarque alors que $\beta = f(\alpha)$.

Définition 2 :

Le réel $b^2 - 4\text{ac}$ noté Δ, est le **Discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples :

a) $P(x) = x^2 - 8x + 3 = (x-4)^2 - 13$
b) $P(x) = 4x^2 - x + 2 = 4((x - \frac{1}{8})^2 + \frac{31}{64})$

3. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a réel non nul), de forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

La représentation graphique de la fonction polynôme du 2nd degré f est la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dont le sommet S a pour coordonnées (α, β)où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Cette parabole admet un **axe de symétrie** : la droite d'équation $x = \alpha$

Si a>0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\nearrow$

f admet un minimum pour $x = -\frac{b}{2a}$

Si a<0

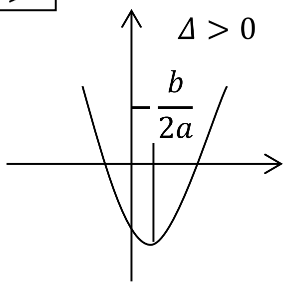
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\searrow$

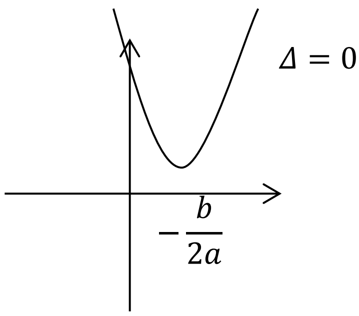
f admet un maximum pour $x = -\frac{b}{2a}$

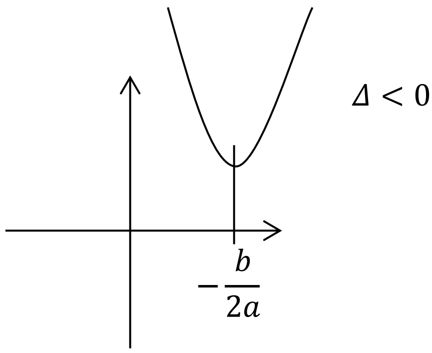
D'un point de vue graphique, $S(x_S; y_S)$ avec $x_S = \alpha$ et $y_S = \beta$.

Différents cas de figures

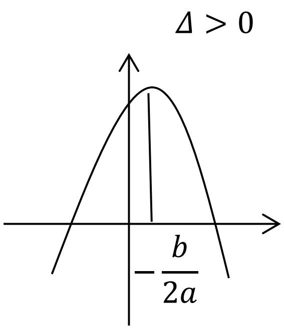
a>0

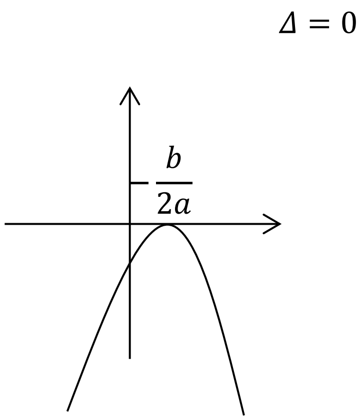


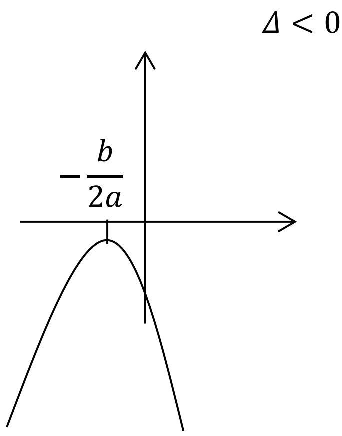




a<0







3. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

Propriété 3 :

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet pour solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration :

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}) = 0$

- Si $\Delta < 0$ $a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}) = 0$

Somme de deux termes positifs qui ne peut être nulle lorsqu'un terme est non nul. Donc $S = \emptyset$

- Si $\Delta = 0$ $a((x + \frac{b}{2a})^2) = 0 \Leftrightarrow a(x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0$

Une solution double $S = \{-\frac{b}{2a}\}$

- Si $\Delta > 0$, $a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}) = 0$ $\Leftrightarrow a((x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}})(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}})) = 0$

$\Leftrightarrow ((x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})) = 0$ car $a \neq 0$

$\Leftrightarrow ((x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})) = 0$

D'où les deux solutions :$S = \{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\}$

Exemples

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^2 + 3x - 5 = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^2 + 4x + 7 = 0$

3. Factorisation et signe d'un trinôme

1. Factorisation de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Propriété 4 :

Soit le polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$ $f(x)$ n'a pas de factorisation possible en facteurs du **premier degré**.
- Si $\Delta = 0$ $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de ce polynôme
- Si $\Delta > 0$ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de ce polynôme.

Démonstration

De ce qui précède, on sait que $f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$.

- Si $\Delta < 0$ Raisonnons par l'absurde

dans ce cas, si f se factorisait en produit de facteurs du 1er degré, f admettrait alors une racine, ce qui n'est pas le cas puisque $\Delta < 0$. Donc f ne peut se factoriser.

- Si $\Delta = 0$

  $f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2) = a(x-\frac{-b}{2a})^2 = a(x-x_0)^2$ où x_0 est la racine double de $P(x)$.

- Si $\Delta > 0$, $f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2) = a(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$

  $= a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de $P(x)$.

<table>
<tr><td colspan="3">Formes de f(x)
Développée : $f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$ Canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$</td></tr>
<tr><td>Factorisée :
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>Factorisée :
$f(x) = a(x-x_0)^2$</td><td>Pas de forme factorisée</td></tr>
</table>

Exemple : factoriser

a) $f(x) = x^2 - 7$ b) $g(x) = 3x^2 - 7x$ c) $h(x) = x^2 + 4x + 7$ d) $P(q) = q^2 + \sqrt{2}q + \frac{1}{2}$

e) $Q(t) = t^2 + 2t - 3$

2. Signe de $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$ ($a \neq 0$)

Propriété 5

- Si $\Delta < 0$ $f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$ Terme positif. Donc $P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$

- Si $\Delta = 0$

  $f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = a(x-x_0)^2$.   Sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $P(x)$ est du signe de a

  Pour x_0, $P(x)$ s'annule.

- Si $\Delta > 0$, $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

On suppose $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	0	+
$x - x_2$	-	0	-	0	+
$P(x)$	Signe de (a)	0	Signe de (-a)	0	Signe de (a)

4. ***Somme et produit de deux réels***

Propriété 6 : Soient x_1 et x_2 , deux réels tels que $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 \times x_2 = P$.
x_1 et x_2 sont solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Démonstration :

Soient x_1 et x_2, deux réels tels que $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 \times x_2 = P$.
x_1 et x_2 sont solution de l'équation $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. En développant, x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$, soit $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ et donc solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.

Réciproquement,
l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ s'écrit $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ et donc $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ dont x_1 et x_2 sont solution.