LA FONCTION EXPONENTIELLE

Contenu

1) INTRODUCTION HISTORIQUE

A) Combien faut-il de grains de sable pour remplir l'univers ?

Archimède dans son bain
Par inconnu (Historia N° 767 - Novembre 2010 - page 38) [Public domain], via Wikimedia Commons

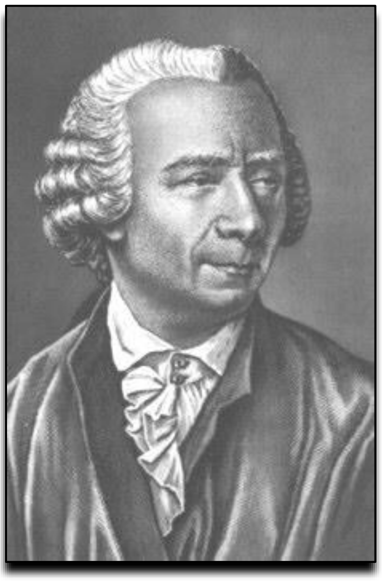
L'Arénaire (grec ancien : Αρχιμήδης Ψαμμίτης, *Archimedes Psammites*) est un ouvrage d'Archimède (III$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ) dans lequel il tente de déterminer un majorant du nombre de grains de sable qui pourraient remplir l'univers. Pour ce faire, il est amené à inventer une façon de décrire des nombres extrêmement grands, et à obtenir une estimation de la taille de l'univers.

Il nomma 10^8, l'unité des nombres secondaires, les nombres premiers étant inférieurs. Il découvrit à cette occasion la loi d'addition des exposants : $10^a 10^b = 10^{a+b}$ à la base de l'exponentiation $a^{b+c} = a^b \times a^c$.

Cette opération étend la notion de puissance en algèbre.

Les astrophysiciens évaluent le nombre d'atomes de l'univers à 10^{80}.

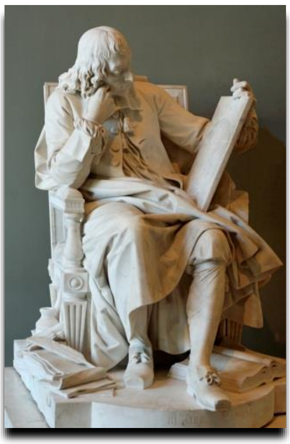
B) Les phenomenes exponentiels temporels



C'est Léonard Euler (1707-1784) qui donna son nom à la fonction exponentielle pour qualifier les phénomènes temporels de ce type que l'on rencontre lorsque les variations d'une quantité sont liées proportionnellement à cette quantité.

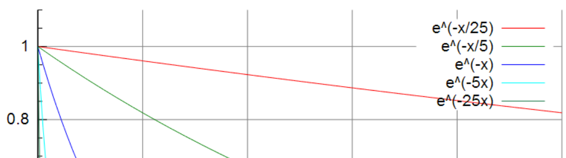
Le 19 septembre 1648, à l'aide de deux tubes remplis de mercure, l'un placé au pied du Puy de Dôme et l'autre monté au sommet, Pascal mis en évidence la loi de décroissance de la pression atmosphérique (p) en fonction de l'altitude (h). Ceci est traduit par la relation suivante liant la variation de la pression (p') à la pression (p) :

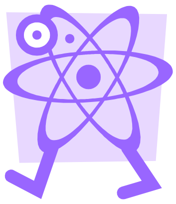
$$p'(h) = -\frac{g}{k} p(h)$$



Blaise Pascal étudiant la cycloïde ; à ses pieds, à gauche, les feuillets épars des *Pensées*, à droite, le livre ouvert des *Lettres provinciales*. Présenté au Salon de 1785 ; le modèle en plâtre vaiat été présenté à celui de 1781. Augustin Pajou.

Le graphique suivant donne l'allure de telles courbes dites exponentielles





Marie Curie, aidée de Pierre, montre à la fin du XIXème siècle, qu'une substance radioactive telle que le radium se désintègre au cours du temps. Le nombre d'atomes qui se désintègrent en un temps donné suit une même loi de décroissance exponentielle, c'est-à-dire que la proportion d'atome qui se désintègre est liée à la quantité d'atomes restant. En 1928, le physicien Gamov montre que cette loi est « sans vieillissement », c'est-à-dire que chaque atome non désintégré « oublie » sa durée de vie. La loi de décroissance est donc indépendante du temps. Tout se passe à chaque instant comme si « rien ne s'était passé » auparavant.

2) Découverte de la fonction exponentielle

A) Etude de l'equation (differentielle) *f' = f*

Propriété admise pour la suite du cours et pour la terminale: a et b désignent deux nombres réels et $a \neq 0$

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Résultat préalable (Lemme) : Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration :</u>

φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$. Une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat précédent dans le cas particulier où $a = -1$ et $b = 0$.

$\varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1)f'(-x) = f'(x) \times f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 0$, donc la fonction φ est constante et vaut n'importe laquelle de ses valeurs, par exemple $\varphi(0) = f(0) \times f(-0) = f(0) \times f(0) = 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) \times f(-x) = 1$.

Ainsi il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x) = 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Propriété – Définition - Notation : Il existe **une unique fonction** f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. C'est la **fonction exponentielle**, notée **exp**.

Démonstration :

Existence : On admet qu'il existe une fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,. $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. Cette existence sera démontrée dans le chapitre « Calcul intégral ».

Unicité : g est une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$ et la fonction $h = \frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$=0 car $f' = f$ et $g' = g$, donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

$h(x) = h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

Donc pour tout $\in \mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et donc $f(x) = g(x)$. D'où l'unicité.

Conséquences immédiates :

Nous noterons exp, cette fonction. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) \times exp(-x) = 1$,d'où $\boxed{\exp\,(x) \neq 0}$ et donc $\boxed{exp(-x) = \frac{1}{exp\,(x)}}$

On a de plus $\boxed{exp' = exp}$ et $\boxed{exp(0) = 1}$.

B) La relation fonctionnelle

Propriété (Relation fonctionnelle): Pour tous nombres réels x et y, $\boldsymbol{exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)}$.

On reconnait ici la relation caractérisant les puissances qui se trouvent présentent dans les suites géométriques, modélisant de façon discrète les problèmes de croissance et de décroissance semblables à ceux rencontrés dans le continu avec la fonction exponentielle.

On reconnait la similarité avec la relation : $q^{n+p} = q^n \times q^p$.

Démonstration :

y est un réel fixé (il aura donc le statut de constante par la suite, de b dans $exp(1 \times x + b)$.

φ est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{exp\,(x+y)}{exp\,(x)}$

$$\varphi'(x) = \frac{exp'(x+y)\,exp(x) - exp(x+y)\,exp'(x)}{(exp(x))^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{exp(x+y)\,exp(x) - exp(x+y)\,\exp(x)}{(exp(x))^2} = 0$$

φ est donc une fonction constante valant n'importe laquelle de ses valeurs, en particulier $\varphi(0) = \frac{exp\, y}{exp\, 0} = exp\, y$

Pour tout réel x, $\varphi(x) = exp\, y$, c'est-à-dire $\frac{exp\,(x+y)}{exp\,(x)} = exp\, y$, ceci quel que soit y et donc :

$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ et } y,\ exp(x+y) = exp(x) \times \exp(y)}$.

C) Les proprietes Algebriques

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration :</u>

Utilisons l'équation fonctionnelle dans le cas particulier ou $x = y = \frac{a}{2}$

Pour tout nombre réel $\in \mathbb{R}$, $exp(a) = exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \left(exp\left(\frac{a}{2}\right)\right) \times \left(exp\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \left(exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$.

La fonction exponentielle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Pour tous nombres réels x et y, $\boldsymbol{exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}}$.

<u>Démonstration :</u>

Pour tous nombres réels x et y, $exp(x-y) = exp(x+(-y)) = exp(x) \times exp(-y)$

Or, $\exp(-y) = \frac{1}{exp(y)}$, donc $exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$.

Propriété (admise) : Pour tous nombres réels x_1 $x_2, \dots, x_n$,
$exp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = exp(x_1) \times exp(x_2) \times exp(x_n)$.

Propriété : Pour tous nombres réels x et tout nombre entier relatif n, $\boldsymbol{exp(nx) = (exp(x))^n}$.

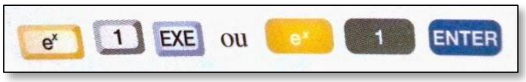
<u>Démonstration :</u>

Nous allons réaliser une démonstration par **disjonction des cas**.

- Pour $n > 0$, l'égalité s'obtient avec la propriété précédente dans le cas particulier $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$
- Pour $n = 0$, l'égalité est immédiatement vérifiée car $exp(0) = 1$.
- Pour $n < 0$, $exp(nx) = exp\big((-n)(-x)\big) = \big(exp(-x)\big)^{-n} = \left[\frac{1}{\exp(x)}\right]^{-n} = [\exp(x)]^n$.

3) LA NOTATION e^x

La notation e est due au mathématicien suisse Léonhard Euler ($\boldsymbol{e}$ comme **E**uler ou comme **e**xponentielle !) en 1728. Il montra aussi que le nombre e est un irrationnel, c'est-à-dire que l'on ne peut pas l'écrire comme un quotient de deux nombres entiers.
On définit le nombre e comme l'image du nombre 1 par la fonction exponentielle : $exp\,1 = e$.
C'est ainsi qu'il apparaitra sur les calculatrices !



Les calculatrices affichent les 10 ou 12 premières décimales et en possèdent le double environ en mémoire. WolframAlpha nous permet d'accéder à des décimales plus lointaines. Bien que sans grande utilité, voilà les premiers chiffres du nombre e :

2

.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416750924476146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133138458300075204493382656029760673711320070932870912744374704723069697720931014169283681902551510865746377211125238978442505695369677078544996996794686445490598793163688923009879312773617821542499922957635148220826989519366803318252886939849646510582093923982948879332036250944311730123819706841614039701983767932068328237646480429531180232878250981945581530175671736133206981125099618188159304169035159888851934580727386673858942287922849989208680582574927961048419844436346324496848756023362482704197862320900216099023530436994184914631409343173814364054625315209618369088870701676839642437814059271456354906130310720851038375051011574770417189861068739696552126715468895703503540212340784981933432106817012100562788023519303322474501585390473041995777709350366041699732972508868769664035557071622684471625607988265178713419512466520103059212366771943252786753985589448969709640975459185695638023637016211204774272283648961342251644507818244235294863637214174023889344124796357437026375529444833799801612549227850925778256209262264832627793338656648162772516401910590049164499828931505660472580277863186415519565324425869829469593080191529872117255634754639644791014590409058629849679128740687050489585867174798546677575732056812884592054133405392200011378630094556068816674001698420558040336379537645203040243225661352783695117788386387443966253224985065499588623428189970773327617178392803494650143455889707194258639877275471096295374152111513683506275260232648472870392076431005958411661205452970302364725492966693811513732275364509888903136020572481765851180630364428123149655070475102544650117272115551948668508003685322818315219600373562527944951582841882947876108526398139559900673764829224437528718462457803619298197139914756448826260390338144182326251509748279877799643730899703888677822713836057729788241256119071766394650706330452795466185509666618566470971134447401607046262156807174818778443714369882185596709591025968620023537185887485696522000503117343920732113908032936344797273559552773490717837934216370120500545132638354400018632399149070547977805669785335804896690629511943247309958765523681285904138324116072260299833053537087613893963917795745401613722361878936526053815584158718692553860616477983402543512843961294603529133259427949043372990857315802909586313826832914771163963370924003168945863606064584592512699465572483918656420975268508230754425459937691704197778008536273094171016343490769642372229435236612557250881477922315197477806056967253801718077636034624592787784658506560507808442115296975218908740196609066518035165017925046195013665854366327125496399085491442000145747608193022120660243300964127048943903971771951806990869986066365832322787093765022601492910115171776359446020232493002804018677239102880978666056511832600436885088171572386698422422010249505518816948032210025154264946398128736776589276881635983124778865201411741109136011649950766290779436460058519419985601626479076153210387275571269925182756879893027617611461625493564959037980458381823233686120162...

Pour tout nombre entier relatif n, $exp(n) = exp(n \times 1) = [exp(1)]^n = e^n$.

Par extension, on convient de noter : $\mathbf{exp(x) = e^x}$, ce qui se lit « exponentielle x » ou « e puissance x ».

Nouvelles écritures des propriétés : Pour tous nombres réels x et y et tout nombre entier relatif n.

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $(e^x)' = e^x$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

4) ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

A) Sens de variation, equations et inequations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $exp' = exp$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) > 0$ ainsi la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	

Conséquences.

De la stricte croissance de la fonction exponentielle, il résulte les équivalences suivantes :

Pour tous réels a et b, $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$ et $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$

De même :

Pour toutes fonctions réels $u(x)$ et $v(x)$, $u(x) = v(x) \Leftrightarrow e^{u(x)} = e^{v(x)}$ et $u(x) < v(x) \Leftrightarrow e^{u(x)} < e^{v(x)}$

B) Synthese

On note C_{exp} la courbe représentative de la fonction exponentielle.

On rappelle l'équation de la tangente à la courbe représentative C_f d'une fonction f dérivable en a.

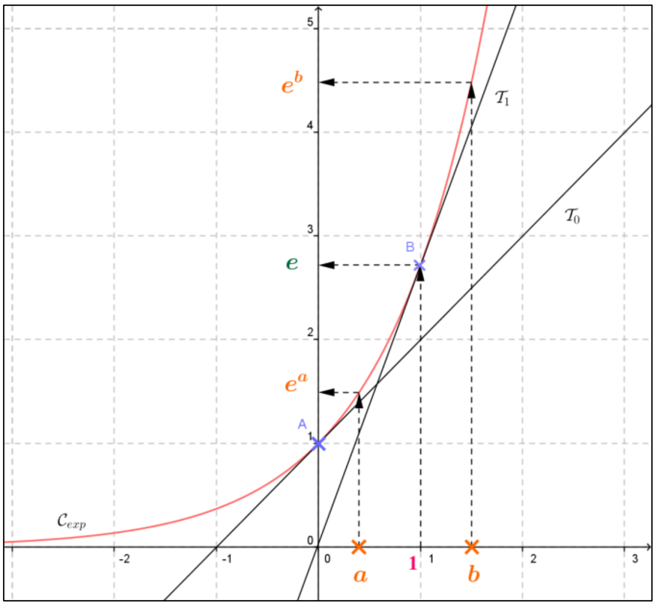
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Equation de la tangente T_0 à C_{exp} au point d'abscisse 0.: $y = e^0(x - 0) + e^0$.

T_0 : $y = x + 1$

- Equation de la tangente T_1 à C_{exp} au point d'abscisse 1.: $y = e^1(x - 1) + e^1$.

T_1 : $y = ex$



5) ETUDE DE LA COMPOSEE AFFINE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

<u>**Dans toute la suite, k est un réel strictement positif.**</u>

Propriétés :

La fonction f_k par $f_k(x) = e^{kx}$ est définie, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction g_k par $g_k(x) = e^{-kx}$ est définie, dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : $f_k'(x) = k \times e^{kx}$>0 e $g_k'(x) = -k \times e^{-kx} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'où les résultats.

Propriété : Pour tous réels a et b, la fonction f par $f(x) = e^{ax+b}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie par $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.