Suites numériques

1 Modes de génération d'une suite
2 Les suites arithmétiques
3 Les suites géométriques
4 Sommes de termes et symbole Σ
5 Représentation graphiques de suites
6 Sens de variations
7 Comportement à l'infini - Limite

1. Modes de génération

Définition : Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'image d'un entier n est notée u_n. On l'appelle terme d'indice n. Cette suite est notée u ou (u_n)

Définir une suite de façon explicite c'est exprimer chaque terme en fonction de n.

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.

- La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ est définie de façon explicite. Il suffit de remplacer n par sa valeur pour calculer u_n.

$n = 0 : u_0 = 0^2 = 0$ $\quad$ $n = 3 : u_3 = 3^2 = 9$

$n = 1 : u_1 = 1^2 = 1$ $\quad$ $n = 4 : u_4 = 4^2 = 16$

$n = 2 : u_2 = 2^2 = 4$ $\quad$ $n = 5 : u_5 = 5^2 = 25$

- La suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = (V_n)^2$ est une suite définie par récurrence.

$n = 0 : V_{0+1} = (V_0)^2 = 2^2 = 4$ donc $V_1 = 4$

$n = 1 : V_{1+1} = (V_1)^2 = 4^2 = 16$ donc $V_2 = 16$

$n = 2 : V_{2+1} = (V_2)^2 = 16^2 = 256$ donc $V_3 = 256$

⚠ Le comportement des suites définie par récurrence dépend énormément de son premier terme

Si $V_0 = 0$ alors $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \cdots = 0$

Si $V_0 = -1$ alors $V_1 = V_2 = V_3 = \cdots = 1$

2. Les suites arithmétiques

Définition. On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel, on a
$$u_{n+1} = u_n + r$$
Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Théorème :
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
Pour tout n et p de $\mathbb{N}$,
$u_n = u_p + (n-p)r$

- Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette différence est constante.
  - La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2+3n$ est arithmétique car
$u_{n+1} - u_n = 2+3(n+1) - (2+3n) = 3$
3 ne dépend pas de n donc la suite est arithmétique
- D'une façon générale, une suite (u_n) définie par $u_n = an+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est une suite arithmétique de raison a.
- Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique on utilise un contre-exemple.
  - La suite (v_n) définie par $v_n = n^2+1$ n'est pas arithmétique car :
$v_0 = 1 \quad v_1 = 2 \quad v_2 = 5$
et $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$
$v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$ donc (v_n) n'est pas arithmétique.

3. Les suites géométriques

Définition. On dit qu'une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel, on a
$$u_{n+1} = u_n \times q$$
Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n).

Théorème :
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

Pour tout n et p de $\mathbb{N}$,
$u_n = u_p \times q^{n-p}$

- Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre que ce quotient est constant.
   - La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ est géométrique car :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+2}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}} = \frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{n+1}} = \frac{2}{9}$$ or $\frac{2}{9}$ ne dépend pas de n donc (u_n) est géométrique

- Pour démontrer qu'une suite n'est pas géométrique, on utilise un contre-exemple.
   - La suite (v_n) définie par $v_n = n^2+1$ n'est pas arithmétique car :

$v_0 = 1 \quad v_1 = 2 \quad v_2 = 5$

et $\frac{v_1}{v_0} = 2$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{2}$

$v_1/v_0 \neq \frac{v_2}{v_1}$ donc (v_n) n'est pas géométrique.

4.1. Le symbole Σ

$\sum_{k=0}^{n} u_k$ est la somme des u_k pour k allant de 0 à n

ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

La somme des premiers entiers naturels est :

$$\sum_{k=1}^{n} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n.$$

- $\sum_{k=5}^{10} 2k = 2\times5 + 2\times6 + 2\times7 + 2\times8 + 2\times9 + 2\times10 = 90$
- $\sum_{k=1}^{10} (2k+1) = (2\times1+1) + (2\times2+1) + \dots + (2\times10+1) = 120$
- $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$
- $\sum_{k=3}^{6} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}$
- $8 + 10 + 12 + \dots + 24 = \sum_{k=4}^{12} 2k$
- $1 + 5 + 9 + 13 + 41 = \sum_{k=0}^{10} 4k+1$

- $$\begin{array}{rcl} 1+2+3+4+\cdots+n &=& S \\ n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1 &=& S \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n(n+1)} &=& 2S \end{array}$$

donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + (u_0+r) + (u_0+2r) + \cdots (u_0+nr)$$
$$= (n+1)u_0 + (r + 2r + \cdots + nr)$$
$$= (n+1)u_0 + r\underbrace{(1+2+3+\cdots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= (n+1)\left[u_0 + \frac{rn}{2}\right] = (n+1)\left[\frac{2u_0 + rn}{2}\right]$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_0 + nr}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

4.2 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

On retiendra :

nombre de termes $\times$ $\dfrac{\text{1er terme + dernier terme}}{2}$

4.3 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

- $$\begin{array}{rl} 1 + q + q^2 + \cdots + q^n & = S \\ q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1} & = qS \quad (q \neq 1) \\ \hline 1 - q^{n+1} & = S - qS \\ & = (1-q)S \quad (q \neq 1) \end{array}$$

donc $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $(q \neq 1)$

- $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n =$
$u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^n u_0 =$
$u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n \right) =$
$u_0 \times \left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$

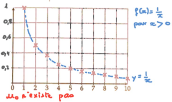
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $(q \neq 1)$
- Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
$= u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

On retiendra :

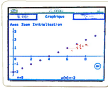
$$1^{er}\text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

- Représentation de la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.



n	u_n
1	1,00
2	0,50
3	0,33
4	0,25
5	0,20
6	0,17
7	0,14
8	0,13
9	0,11
10	0,10

- Cas particulier de la représentation d'une suite arithmétique :



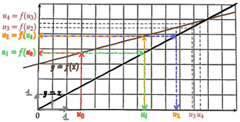
$u_n = \frac{1}{2}n - 2$

ici $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ dont la représentation est une droite et le coefficient directeur la raison.

5.1 Représentation d'une suite définie de façon explicite

- La suite u est définie par $u_n = f(n)$
- Vérifier s'il existe des valeurs de n pour lesquelles u_n n'est pas défini.
- Calculer les termes de la suite en remplaçant n par sa valeur dans l'expression $f(n)$ donnée.
- Représenter les points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ qui sont les points d'abscisse entière et positive de la courbe $\mathcal{C}$ de f.

Représenter (u_n) définie par $u_0 = 1{,}5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$.



5.2 Représentation d'une suite définie par récurrence

- La suite u est définie par u_0 (ou un premier terme d'indice différent) et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$
- Construire la courbe représentant f
- Construire la droite d'équation $y = x$ (bissectrice du repère)
- Placer u_0 (ou le 1er terme) sur l'axe des abscisses.
- Construire son image (u_1) par f.
- Reporter cette valeur sur l'axe des abscisses (sans oublier de la nommer)
- Construire de la même façon les termes suivants.

6. Sens de variation d'une suite

① On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$
- Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors (u_n) est décroissante
- Si cette différence change de signe alors (u_n) n'est pas monotone.

② Pour une suite à terme strictement positifs on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on le compare à 1
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors (u_n) est croissante
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors (u_n) est décroissante
- Si cela dépend des valeurs de n alors (u_n) n'est pas monotone.

③ Cas d'une suite u définie par $u_n = f(n)$
- Si f est croissante alors u est croissante
- Si f est décroissante alors u est décroissante.

(les variations de f sont données sur $[0; +\infty[$ ou $[a; +\infty[$ avec $a>0$)

① $u_n = n^2 - 8n + 18$ pour $n \geqslant 0$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 8(n+1) + 18 - n^2 + 8n - 18$
$= 2n - 7$

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend de n donc la suite (u_n) n'est pas monotone.
A partir de $n = 4$, cette différence est positive donc (u_n) est croissante pour $n \geqslant 4$

② $v_n = \frac{1}{3^n}$ $n \geqslant 0$

Pour $n \geqslant 0$, $v_n > 0$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{1} = \frac{1}{3} < 1$$

donc (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

③ $w_n = -\frac{1}{4n+1}$ $n \geqslant 0$

$w_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{-1}{4x+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$f'(x) = \frac{4}{(4x+1)^2} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

et w est croissante sur $\mathbb{N}$.

4) On montre qu'une suite n'est pas monotone en utilisant un contre exemple.

Exemple : $u_n = 2 \times (-3)^n$

$u_0 = 2$ $u_1 = -6$ $u_2 = 18$

$u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$ donc (u_n) n'est pas monotone.

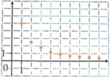
5) Cas particulier des suites arithmétiques de raison $r \neq 0$

- Si $r > 0$ alors la suite est croissante
- Si $r < 0$ alors la suite est décroissante

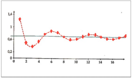
6) Cas particulier des suites géométriques de raison q et de premier terme u_0.

- Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite est décroissante
- Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ alors la suite est croissante
- Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite est croissante
- Si $u_0 < 0$ et $q > 1$ alors la suite est décroissante
- Si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone

Suite convergeant vers 0 →

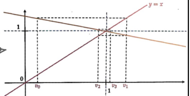


7.1 Suites convergentes



← Suite convergeant vers 0,7

Suite convergeant vers 1 →



Définition intuitive : Suite convergente
On dit qu'une suite est convergente vers ℓ lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de ℓ lorsque n devient très grand.

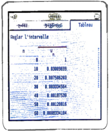
Cela signifie que : $\begin{cases} n \to +\infty \\ u_n \to \ell \end{cases}$

Si une suite converge vers ℓ on dit que la suite a pour limite ℓ.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Avec un tableau de valeurs :

$$u_n = \frac{1+3n^2}{n^4+1}$$



Cette suite semble converger vers 0.

On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

7.2 Suites divergentes

On dit qu'une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.
Deux cas sont possibles.

- La suite n'a pas de limite
- Les termes de la suite tendent vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

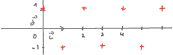
On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

ou $$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

(si la suite se nomme u !)

- La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est divergente car elle n'a pas de limite.



- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 12n$ est divergente.

On a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$