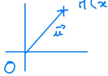
Produit scalaire dans le plan

1 Définitions et expressions
2 Règles de calculs
3 orthogonalité
4 Projection orthogonale
5 Droites
6 Théorème d'Al-Kashi (Pythagore généralisé)
7 Cercles
8 Ensembles de points. Lignes de niveau.
9 Epistémologie
10 Escape code

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  - $\|2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$
  - $\|-3\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\|$
- Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ si $\vec{u}(x;y)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$



$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$

$= \sqrt{x^2+y^2}$

1.1 Norme d'un vecteur

Définition : Une unité de longueur étant choisie, la norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est la longueur AB.

On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit unitaire.

Par convention : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2}$

et donc $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2}$ carré scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|2\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(4\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\|\vec{u}\|^2\right) = \|\vec{u}\|^2$$

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

on obtient $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Remplacer $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ par $\vec{0}$ dans la définition.

On a aussi :

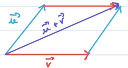
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

1.2 Définition du produit scalaire

Définition : le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

Ce nombre noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et par définition :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$



On donne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
$\vec{u}(-2; 3)$ et $\vec{v}(5; 2)$. Calculez :

- $\|\vec{u}\| =$
- $\|\vec{v}\| =$
- $\vec{u} + \vec{v}\,(\quad ; \quad)$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| =$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Démonstration :

$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$

$= x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy'$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2\right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(2xx' + 2yy'\right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ ■

et donc $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$

1.3 Expression analytique du produit scalaire

Théorème : Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration :

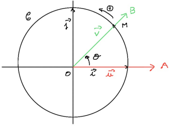
- Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:
$\vec{OA}\ (OA\ ;\ 0)$ et $\vec{OB}\ (OB \cos\theta\ ;\ OB \sin\theta)$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos\theta + 0 \times OB \sin\theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos\theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$ ∎



1.4 Expression du produit scalaire avec le cosinus

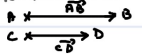
> **Théorème** : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, et A, O et B trois points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.
>
> alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
>
> $= OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$

- **Remarque** : En nommant $\theta = \widehat{AOB} = (\vec{u}, \vec{v})$

on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$.

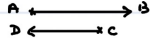
- **Vecteurs colinéaires** :

- vecteurs colinéaires de même sens



$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = AB \times CD$

- Vecteurs colinéaires de sens opposés



$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = - AB \times CD$

Conséquences : Posons $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$

$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{AB}) \cdot \vec{CD} = \vec{BA} \cdot \vec{CD} = -\vec{BA} \cdot \vec{DC} = \vec{AB} \cdot \vec{DC}$

Identités remarquables

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{AB} - \vec{CD})^2 = AB^2 + CD^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{AB} + \vec{CD})^2 = AB^2 + CD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$(\vec{AB} + \vec{CD}) \cdot (\vec{AB} - \vec{CD}) = AB^2 - CD^2$

2. Règles de calcul

Théorème : quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et les nombres a et b

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab)\, \vec{u} \cdot \vec{v}$

Démonstration avec les coordonnées dans un repère orthonormé.

Démonstration :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est immédiat
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
  Notons $\theta = (\vec{u} ; \vec{v})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$

or $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\cos\theta = 0$

soit $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Dans un repère orthonormé

si $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $xx' + yy' = 0$

3. Produit scalaire et orthogonalité

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Par convention, le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Théorème : Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ainsi dire que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Démonstration :

- D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$$

donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}\right)$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}}_{0 \text{ car } \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CC'}} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'} + \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}}_{0 \text{ car } \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{D'D}}$$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'} \quad \blacksquare$$

Remarque :

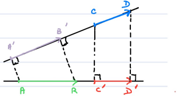
On obtient de même $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}$ où A' et B' sont les projetés orthogonaux de A et B sur (CD).

Pour calculer un produit scalaire on peut remplacer l'un des vecteurs par "son projeté orthogonal sur l'autre vecteur".

4. Projection orthogonale

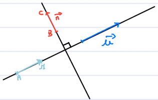
Théorème : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non nuls.
Les points C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$



5.1. Vecteur normal à une droite

Définition : Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ ($\vec{n} = \vec{BC}$) est normal à une droite d signifie que les droites (BC) sont perpendiculaires à d. Ainsi un vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d est orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de d.



Conséquences : • Dire qu'un point M appartient à la droite d passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ équivaut à dire que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

• Si $\vec{n}$ est un vecteur normal de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d alors :
  - $\vec{n}$ est un vecteur directeur de toute droite d' perpendiculaire à d.
  - $\vec{u}$ est un vecteur directeur de toute droite d' parallèle à d.

• d et d' sont deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ pour vecteurs normaux et $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ pour vecteurs directeurs :

$$d \perp d' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \iff \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$$
$$\iff \vec{n} \text{ et } \vec{u}' \text{ colinéaires.}$$

Démonstration.

- Supposons que $d : ax+by+c=0$ $(a;b)\neq(0;0)$ alors $\vec{u}(-b;a)$ est directeur de d. Posons $\vec{v}(a;b)$. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -ba+ab = 0$
  donc $\vec{u}\perp\vec{v}$. On peut donc choisir $\vec{v}=\vec{n}$ d'où $\vec{n}(a;b)$.

- Réciproquement, supposons que $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal de d. Soit $A(x_A;y_A)$ un point de d.
  La droite d est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$
  avec $\vec{AM}(x-x_A;y-y_A)$ et $\vec{n}(a;b)$
  $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
  $\iff ax+by\underbrace{-ax_A-by_A}_{}=0$
  Notons $c=-ax_A-by_A$
  $\iff ax+by+c=0$ avec $c=-ax_A-by_A$

La droite d a bien pour équation $ax+by+c=0$.

5.2. Équation de droite

Théorème : Dans un repère orthonormé

- Si une droite d a une équation de la forme $ax+by+c=0$ $(a;b)\neq(0;0)$ alors $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal de d.
- Réciproquement, si un vecteur non nul $\vec{n}$ de coordonnées $(a;b)$ est normal à une droite d, alors d a une équation de la forme $ax+by+c=0$

Conséquences : . Si $\begin{cases} d : ax+by+c=0 \\ d' : a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Alors $d\perp d' \iff aa'+bb'=0$

. Si $\begin{cases} d : y=mx+p \\ d' : y=m'x+p' \end{cases}$

Alors $d\perp d' \iff mm'=-1$

(dans ce cas $\vec{u}(m;-1)$ et $\vec{u}'(m';-1)$ sont des vecteurs normaux de d et d')

Démonstration :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2(-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2\,AB\cdot AC \cos\hat{A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

On démontre de même que :

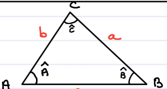
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

6. Théorème d'Al-Kashi

Théorème : ABC est un triangle avec les notations usuelles

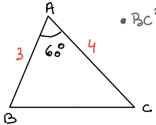
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



Remarque : Si ABC est rectangle en A, alors $\cos\hat{A} = 0$ et on retrouve le théorème de Pythagore

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Application :



- $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AC \times AB \times \cos 60°$

$= 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2}$

$= 25 - 12 = 13$

donc $BC = \sqrt{13}$.

- $AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2\,BC \times BA \times \cos \hat{B}$

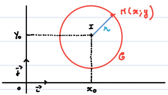
donc $\cos \hat{B} = \dfrac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2\,BC \times BA} = \dfrac{9 + 13 - 16}{2 \times 3\sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

Ainsi $\hat{B} = \mathrm{Acos}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \simeq 74°$

$\hat{C} \simeq 180° - 60° - 74°$ donc $\hat{C} \simeq 46°$

7.1. Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r est : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$



Par définition "$M(x;y)$ est un point de $\mathcal{C}$" équivaut à "$IM^2 = r^2$"

$\overrightarrow{IM}(x-x_0 ; y-y_0)$ et donc

$$IM^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

Ainsi $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Exemple :

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 12$ est une équation du cercle de centre $I(1 ; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Démonstration :

- Si $M = A$ ou $M = B$ alors $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- Si $M \neq A$ et $M \neq B$, le triangle AMB est rectangle en M et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ∎

Equation (développée) du cercle $M(x\,;\,y)$

$\overrightarrow{AM}(x-a\,;\,y-b)$ $\overrightarrow{BM}(x-c\,;\,y-d)$

or $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff (x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0$

Soit $x^2 + y^2 - (a+c)x - (b+d)y + ac + bd = 0$

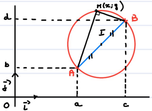
Cette équation est de la forme
$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Remarque : Tout cercle a une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + By + c = 0$ mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement une équation de cercle.

7.2. Équation d'un cercle défini par son diamètre

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Autrement dit :
« M est un point de $\mathcal{C}$ » équivaut à « $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ »



Exemples :

- $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$

$(x^2 - 4x) + (y^2 + 10y) - 7 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 - 7 = 0$

$(x-2)^2 + (y+5)^2 - 36 = 0$

$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 36$

Équation du cercle de centre $I(2; -5)$ et de rayon 6

- $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 4 = 0$

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 3y) + 4 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = 0$

$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} < 0$

Aucun point $M(x; y)$ ne possède de coordonnées vérifiant cette équation donc cet ensemble est vide.

8.1 Lignes de niveau $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

Soient A et B deux points distincts et I le milieu de [AB]

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$$
$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}\text{ car I milieu de [AB]}} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ avec $k\in\mathbb{R}$, est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

Démonstration :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k \iff MI^2-\frac{1}{4}AB^2=k$$
$$\iff MI^2 = k+\frac{1}{4}AB^2$$

- Si $k+\frac{1}{4}AB^2>0$, alors l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+\frac{1}{4}AB^2}$.
- Si $k+\frac{1}{4}AB^2=0$, alors l'ensemble des points M est réduit au seul point I.
- Si $k+\frac{1}{4}AB^2<0$ alors l'ensemble des points M est vide.

Exemple : On donne $AB = 3$. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 6$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 6 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 6$ (I milieu de $[AB]$)

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 6 \Leftrightarrow MI^2 = 6 + \frac{1}{4} \times 3^2 = 6 + \frac{9}{4} = \frac{33}{4}$

Γ est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{\sqrt{33}}{2}$

Hermann Günter Grassmann (1809-1877)

Mathématicien allemand. On lui doit l'idée de faire le produit de deux vecteurs pour obtenir un nombre.

C'est en 1839 dans sa thèse "théorie des flots et des marées", qu'il définit le produit linéaire de deux vecteurs, qui est notre produit scalaire actuel.

http://serge.mehl.free.fr/chrono/Grassmann.html

ESCAPE CODE:

Une distance inaccessible …

Document du XVI$^{\text{ème}}$ siècle

Sachant que l'instrument utilisé est une équerre, si AF vaut 2 pieds et AC vaut 4 pieds, combien de pieds vaut AB ? est la valeur approchée entière la plus proche de AB mesurée en centimètres.