Exercices avec exponentielles - suites et fonctions

ex1 (u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = e^{-\frac{n}{2}}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est géométrique.

2. On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Exprimez S_n en fonction de n.

ex2 (u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = e^{1-\frac{n}{3}}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est géométrique.

2. On pose pour tout entier naturel n :

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n.$$

Prouvez que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n = e^{\frac{-n^2+5n+6}{6}}$.

ex3 Dans une entreprise, on installe un nouvel atelier.

Pendant la période de « mise en route », la quantité produite le n-ième jour ($n \geqslant 1$) est donnée par :

$$u_n = 80 - 27e^{-0,1n}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = e^{-0,1n}$.

a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique.

b) Calculez la somme $v_1 + v_2 + \ldots + v_{12}$.

3. À la suite d'une avarie, l'atelier doit être arrêté après douze jours de fonctionnement.

Quelle est la production totale, à une unité près, obtenue pendant cette période ?

ex4 **1.** Justifiez que pour tout nombre x, $e^x \geqslant x + 1$.

2. Déduisez-en que :

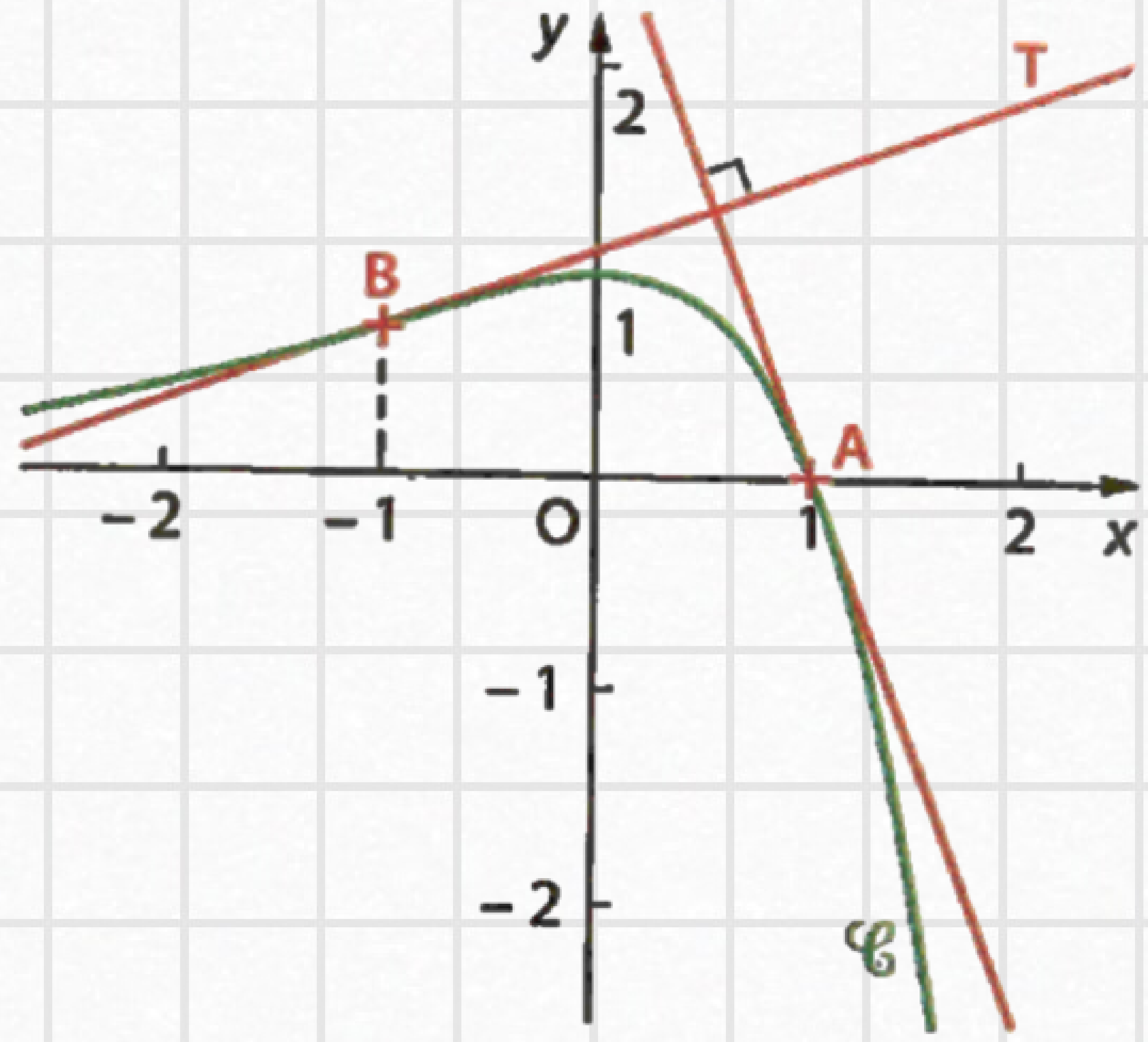
a) $e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$; **b)** $(x-1)e^x + 1 \geqslant 0$.

3. Exploitez les résultats précédents pour démontrer que la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ est strictement croissante.

ex5 Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 - x)e^x.$$

A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et -1.



1. Démontrez que les tangentes en A et B à la courbe $\mathscr{C}$ sont perpendiculaires.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T en B à $\mathscr{C}$.

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - \frac{1}{e}(x + 3).$$

a) Calculez $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout nombre x.

b) Étudiez le sens de variation de g' et précisez $g'(-1)$.

c) Déduisez-en le sens de variation de g et concluez.

ex6 **Étude d'une famille de fonctions**

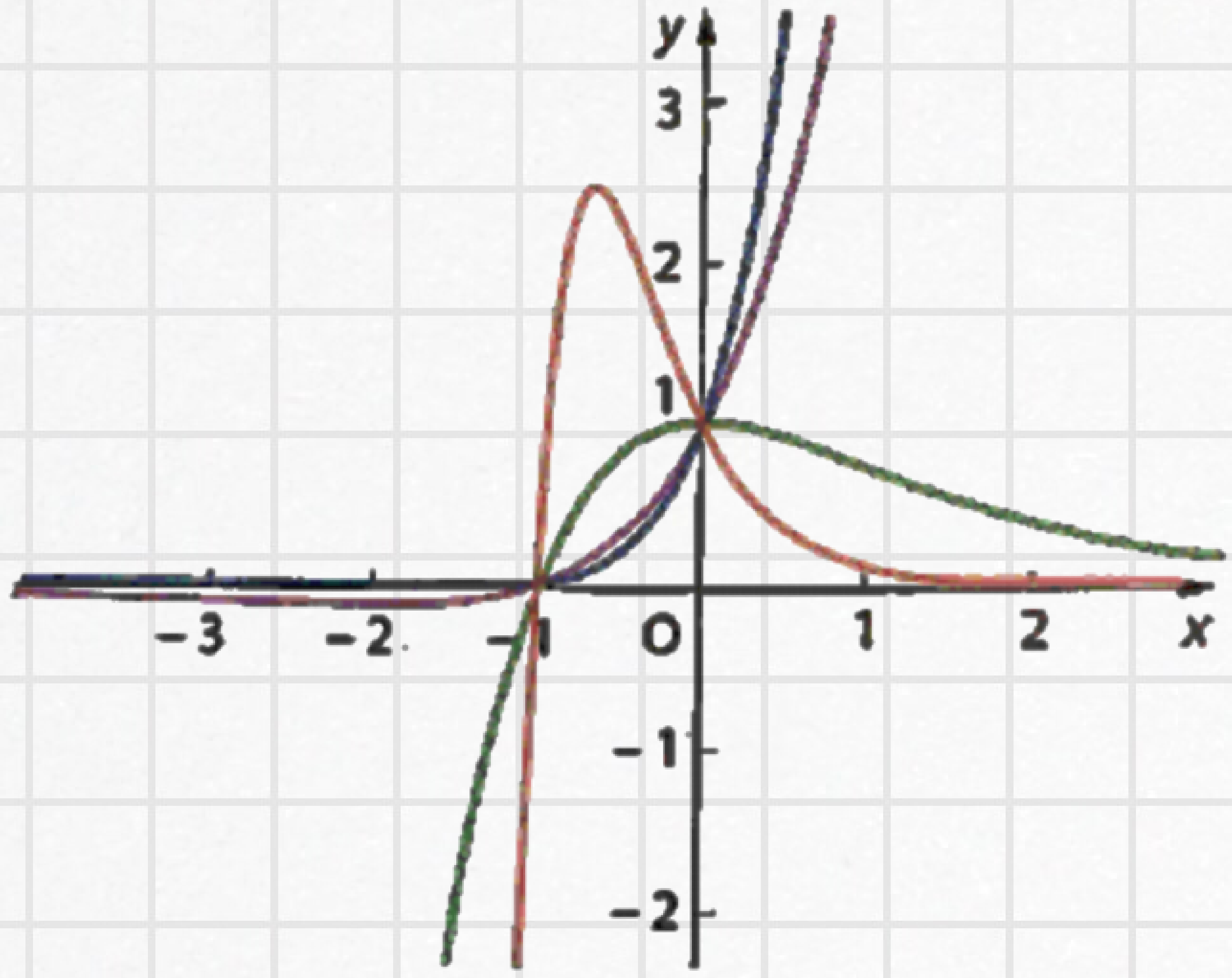
A. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}_{-1}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudiez les variations de f, les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Résumez les résultats dans un tableau le plus complet possible.

2. Repérez $\mathscr{C}_{-1}$ sur la figure ci-dessous.



B. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = (x+1)e^{mx}$.

$\mathscr{C}_m$ est la courbe représentative de f_m.

1. a) Quelle est la nature de f_0 ?

Dans la suite, on suppose $m \neq 0$.

b) Déterminez les points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$, et vérifiez que pour tout entier relatif m, ces points appartiennent à $\mathscr{C}_m$.

2. Étudiez la position relative de $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{C}_{m+1}$.

3. a) Calculez, pour tout nombre x, $f'_m(x)$.

b) Déduisez-en le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m (on distinguera $m > 0$ et $m < 0$).

4. Sur la figure ci-dessus, on a tracé quatre courbes correspondant à quatre valeurs différentes de m : -1 ; -3 ; 1 ; 2. Identifiez les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant votre réponse.

Corrections

ex1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = e^{-\frac{n+1}{2}} = e^{-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\frac{n}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}} = u_n \times e^{-\frac{1}{2}}$$

donc (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-1/2}$ et de premier terme $u_0 = e^{-0/2} = 1$.

2) S_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique, donc en appliquant la formule :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 1 \times \frac{1 - (e^{\frac{-1}{2}})^{n+1}}{1 - e^{-1/2}}$$

$$S_n = \frac{1 - e^{-\frac{(n+1)}{2}}}{1 - e^{-1/2}}$$

ex2

1. $u_{n+1} = e^{1-\frac{n+1}{3}} = e^{1-\frac{n}{3}} e^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}} u_n$, donc la suite u_n est une suite géométrique de premier terme $u_0 = e$ et de raison $e^{-\frac{1}{3}}$.

2. $P_n = u_0 \times u_0 q \times \dots \times u_0 q^n = u_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n}$

soit $P_n = e^{n+1} e^{-\frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2}} = e^{\frac{-n^2+5n+6}{6}}$

ex3

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 80 - 27^{-0,1x}$, donc $f'(x) = 27e^{-0,1x} > 0$ donc f est une fonction strictement croissante et la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a) $v_{n+1} = e^{-0,1n} \times e^{-0,1} = e^{-0,1} v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $e^{-0,1}$ et de raison $e^{-0,1}$.

b) $v_1 + \dots + v_{12} = \dfrac{v_1[1-(e^{-0,1})^{12}]}{1-e^{-0,1}} = \dfrac{e^{-0,1}[1-e^{-1,2}]}{1-e^{-0,1}}$,

ou encore $v_1 + \dots + v_{12} = \dfrac{1-e^{-1,2}}{e^{0,1}-1}$

3. $u_n = 80 - 27v_n$ donc

$$u_1 + \dots + u_{12} = 80 \times 12 - 27\frac{1-e^{-1,2}}{e^{0,1}-1}$$

ex4 1) Étudions les variations puis le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

$$f'(x) = e^x - 1$$

Or $f'(x) \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0$

$$\iff e^x \geq 1$$

$$\iff e^x \geq e^0$$

$$\iff x \geq 0$$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

or le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0 donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et par conséquent

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

et donc $e^x \geq x + 1$.

2) a) En posant $x = -a$ on a pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$e^{-a} \geq -a + 1$$

et donc $e^{-a} + a - 1 \geq 0$

Il suffit de remplacer $a = x$ pour obtenir le résultat :

$$e^{-x} + x - 1 \geq 0$$

b) Multiplions l'inégalité précédente par $e^x > 0$.

Nous obtenons

$$e^x\left(e^{-x} + (x-1)\right) \geq 0$$

$$\underbrace{e^x e^{-x}} + e^x(x-1) \geq 0$$

$$e^{x-x} = e^0 = 1$$

$$1 + e^x(x-1) \geq 0$$

3) Pour tout $x > 0$

$$g'(x) = \frac{e^x \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2}$$

Or nous avons vu en 2a) que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x(x-1) \geq 0$ donc puisque $x^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$

$g'(x) \geq 0$ et donc g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

ex 5

1. $f'(x) = e^x[1-x-1] = -xe^x$.

$f'(1) = -e\,;\, f'(-1) = \frac{1}{e}$.

La tangente en A a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(1\,;-e)$ et celle en B a pour vecteur directeur $\vec{u}_2\left(1\,;\frac{1}{e}\right)$.

$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$ donc les tangentes sont perpendiculaires. La tangente en B a pour équation :

$$y = \frac{1}{e}(x+1) + \frac{2}{e} = \frac{1}{e}(x+3).$$

2. a) $g'(x) = -xe^x - \frac{1}{e}$.

$g''(x) = (-x-1)e^x$.

b)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g''		$+$	0	$-$	
g'		$\nearrow$	0	$\searrow$	
g		$\searrow$	$\frac{2}{e}-\frac{2}{e}=0$	$\searrow$	

c) Donc $g(x) > 0$ si $x < -1$ et $g(x) < 0$ si $x > -1$, donc, pour $x < -1$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente et $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente pour $x > -1$.

---

ex 6

A 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$f'(x) = -xe^{-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. $\mathscr{C}_{-1}$ est la courbe verte de la figure.

B 1. a) f_0 est une fonction affine représentée par une droite.

b) $f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow (x+1) = (x+1)e^x$, soit $(x+1)(1-e^x) = 0$.

Les solutions sont $x = -1$ et $x = 0$. Or $f_m(0) = 1$ et $f_m(-1) = 0$.

Donc toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par $A(0\,;1)$ et $B(-1\,;0)$.

2. $f_{m+1}(x) - f_m(x) = (x+1)e^{(m+1)x} - (x+1)e^{mx}$

$= (x+1)\,e^{mx}(e^x - 1)$.

	-1		0	
$\mathscr{C}_{m+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_m$		$\mathscr{C}_{m+1}$ est en dessous de $\mathscr{C}_m$		$\mathscr{C}_{m+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_m$
	$f_m(-1) = f_{m+1}(-1)$		$f_m(0) = f_{m+1}(0)$	

3. a) $f'_m(x) = m(x+1)e^{mx} + e^{mx}$

$= e^{mx}\,[mx + m + 1]$.

b) $m > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{m+1}{m}$		$+\infty$
f'_m		$-$	0	$+$	
f_m	0	$\searrow$	$f\left(-\frac{m+1}{m}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$m < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{m+1}{m}$		$+\infty$
f'_m		$+$	0	$-$	
f_m	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{m+1}{m}\right)$	$\searrow$	0

4. La courbe rouge est $\mathscr{C}_{-3}$; $\mathscr{C}_{-1}$ est la verte ; $\mathscr{C}_1$ est la violette et $\mathscr{C}_2$ est la bleue.