Eléments de correction DTL 1

① Posons que les 3 entiers consécutifs sont x, $x-1$ et $x+1$.

On obtient l'équation :

$$x(x-1)(x+1) = x + x-1 + x+1$$

$$x(x^2-1) = 3x \quad \text{soit} \quad x(x^2-1)-3x=0$$

Factorisons par x : $x(x^2-1-3)=0$

Soit $x(x^2-4)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \text{ ou } x=2 \end{cases}$

On trouve donc 3 triplets de nombres vérifiant l'équation $(-1;0;1)$ $(-3;-2;-1)$ et $(1;2;3)$

Remarque : on pouvait aussi chercher graphiquement l'intersection de courbes $y=x^3-x$ et $y=3x$ par exemple. C'est moins rigoureux mais on trouve toutes les solutions que l'on désire.

---

② L'équation modélisant le problème est $(x+4)^2+(x+5)^2=(x+6)^2$ dont les 2 solutions -5 et -1 sont négatives donc à exclure.

---

③ Il suffit de programmer sur sa calculatrice.

---

④ La fonction volume $V(x)$ modélisant la situation est $V(x)=x^3+(10-x)^3$

soit $V(x) = 30x^2 - 300x + 1000$

définie sur $[0;10]$ qui atteint son minimum en $x=5$ (cm) qui vaut 250 (cm³).

---

⑤ • ax^2+x-a. $\Delta = 1+4a^2>0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc l'équation $ax^2+x-a=0$ admet toujours 2 racines distinctes.

• $2x^2+mx+2=0$. $\Delta = m^2-16$

$\Delta<0 \iff -4<m<4$. Donc l'équation n'admet pas de solution pour $m \in]-4;4[$

• Soit à résoudre $\frac{1}{x} = 1,9x+8,4$ soit

$1,9x^2+8,4x-1=0$

Cette équation admet 2 solutions :

$x_1 = \frac{-1,9-\sqrt{37,21}}{-2} = \frac{1,9+\sqrt{37,21}}{2} = 4$

$x_2 = \frac{1,9-\sqrt{37,21}}{2} = -2,1$

Les 2 points d'intersection sont $A(x_1;x_1^2)$ et $B(x_2;x_2^2)$

---

⑥ $M(m;\frac{1}{m})$ et $N(n;\frac{1}{n})$. $A(2;1)$

milieu de $[MN]$ se traduit par :

$\frac{m+n}{2}=2$ soit $m+n=4$ et donc $m=4-n$

et $\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2}=1$ donc $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2$ et donc

$\frac{n+m}{mn}=2$ soit $n+m=2mn$. En substituant

$m=4-n$ on obtient $n+4-n=2(4-n)n$

soit $4=-2n^2+8n \iff 2n^2-8n+4=0$

Cette équation admet 2 solutions symétriques par rapport à 2 $n_1=2-\sqrt{2}$ et $n_2=2+\sqrt{2}$.

Or $m_1=4-n_1=n_2$ et $m_2=4-n_2=n_1$.

Les réels n et m cherchés sont donc :

$2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$ ou $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$.

7 • Si $m=0$ alors $-3x+3=0$ et $x \in \{1\}$

• Pour $m \neq 0$ $\Delta_1 = 21m^2 + 30m + 9$

L'équation n'admet pas de solution si et seulement si $\Delta < 0$. $\Delta_{\Delta_1} = 144$ d'où le tableau de signe de Δ_1

x	$-\infty$		-1		$-3/7$		$+\infty$
Signe de Δ_1		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'équation n'admet pas de solution pour $m \in \left]-1; -\frac{3}{7}\right[$.

• L'équation admet 2 solutions distinctes pour $m \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\frac{3}{7};0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.

• $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b}{a}$

$= \dfrac{-(-3-3m)}{-m} = \dfrac{-3-3m}{m}$

$P = x_1 x_2 = \dfrac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} = \dfrac{+b^2-\Delta}{4a^2}$

$= \dfrac{+b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3m+3}{-m}$

$= S$

Les 2 solutions sont positives si et seulement si S et P sont strictement positifs (or $S=P$)

m	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $-3-3m$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
Signe de m		$-$		$-$	‖	$+$	
Signe de S ou P		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$P=S>0$ pour $m \in \left]-1;0\right[$. Donc l'équation admet 2 racines positives si $m \in \left]-1;0\right[$.

8 1) $D_f = [0;2]$

2) $f(x) = (0{,}5^2 + x^2) + (1^2 + (2-x)^2)$

$f(x) = 2x^2 - 4x + 5{,}25$

3

x	0		1		2
variations de f	$5{,}25$	$\searrow$	$3{,}25$	$\nearrow$	$5{,}25$

4 f atteint son minimum en $x=1$ qui vaut $3{,}25$ (et ses maximums en $x=0$ et $x=2$ qui valent $5{,}25$)

5 Le triangle ne peut être rectangle qu'en M soit $MI^2 + MC^2 = IC^2$

ce qui équivaut à $2x^2 - 4x + 1 = 0$

et conduit à 2 valeurs de x :

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \in [0;2]$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \in [0;2]$

Elles conviennent donc toutes les deux.

9 1) 2) 3)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}-1$		-1		$\sqrt{3}-1$		$+\infty$
variation de f		$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de f		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Si $f(x) \geq 0$ alors $g(x) = |f(x)| = f(x)$

Si $f(x) < 0$ alors $g(x) = |f(x)| = -f(x)$

(10) a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ et $X = x^2$

équivaut à $\begin{cases} X^2 - 4X + 3 = 0 \\ X = x^2 \end{cases}$

Cette équation prséde 2 solutions $X_1 = 3 > 0$ et $X_2 = 1 > 0$ ainsi puisque $x^2 = X$ l'équation bicarrée possède 4 solutions $\{-\sqrt{3} ; -1 ; 1 ; \sqrt{3}\}$.

b) $3x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ et $X = x^2$

équivaut à $\begin{cases} 3X^2 - 3X + 1 = 0 \\ X = x^2 \end{cases}$

Cette équation ne possède pas de solution puisque $\Delta < 0$ donc l'équation bicarrée non plus.

c) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ et $X = x^2$

équivaut à $\begin{cases} X^2 - 4X + 4 = 0 \\ X = x^2 \end{cases}$

$\Delta = 0$ donc l'équation prséde une unique solution $X = 2 > 0$ or $x^2 = 2$ ainsi l'équation bicarrée prséde 2 solutions $\{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$.

d) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ et $X = x^2$

équivaut à $\begin{cases} X^2 + 2X - 3 = 0 \\ X = x^2 \end{cases}$

Cette équation prséde 2 solutions $X_1 = -3 < 0$ et $X_2 = 1 > 0$ ainsi puisque $x^2 = X$ l'équation bicarrée possède 2 solutions $\{-1 ; 1\}$.

(20) 1) $x \in [0 ; 3]$

2) $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AMQ} \times 2 - \mathcal{A}_{MBN} \times 2$

$\mathcal{A}(x) = 15 - 2\left(\frac{-x^2 + 5x}{2}\right) - 2\left(\frac{-x^2 + 3x}{2}\right)$

$= 15 - (-x^2 + 5x) - (-x^2 + 3x)$

$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$

3) a) $A(x) = 9 \iff 2x^2 - 8x + 6 = 0$

soit $x = 1$ ou $x = 3$

b) $A(x) \leq 9 \iff 2x^2 - 8x + 6 \leq 0$

soit $x \in [1 ; 3]$

4)

x	0	2	3
variations de A	15 ↘	7	↗ 9

L'aire de MNPQ est maximale pour $x = 0$ et vaut 15. L'aire de MNPQ est minimale pour $x = 2$ et vaut 7.