Exercice 1*

En Janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.
Trois types de visites sont proposés :

- La visite individuelle sans location d'audioguide.
- La visite individuelle avec location d'audioguide.
- La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans audioguide.
Pour la visite de gropue, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.

Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

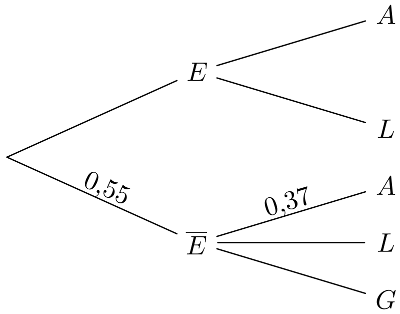
- 55 % des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée ;
- parmi les billets achetés au guichet du musée, 51 % des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37 % à des visites avec location d'audioguide ;
- 70 % des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015.
On considère les évènements suivants :

- E : "*le billet a été acheté en ligne*" ;
- A : "*le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide*" ;
- L : "*le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide*" ;
- G : "*le billet correspond à une visite de groupe*"

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :



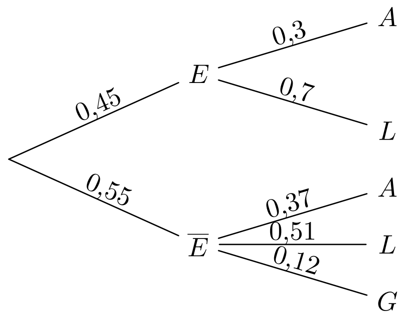
2. Montrer que la probabilité que le billet ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à 0,135.

3. Montrer que : $p(A) = 0{,}3385$

4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide. Quelle est la probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée?
On arrondira le résultat au millième.

Correction 1

1. Voici l'arbre complété :



2. La probabilité demandée est la probabilité de l'évènement $E\cap A$.
Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :
$$\mathcal{P}_E(A) = \frac{\mathcal{P}(E\cap A)}{\mathcal{P}(E)}$$
$$0{,}3 = \frac{\mathcal{P}(E\cap A)}{0{,}55}$$
$$\mathcal{P}(E\cap A) = 0{,}45\times 0{,}3$$
$$\mathcal{P}(E\cap A) = 0{,}135$$

3. D'après la défition des probabilités conditionnelles, on a :
$$\mathcal{P}_{\overline{E}}(A) = \frac{\mathcal{P}(\overline{E}\cap A)}{\mathcal{P}(\overline{E})}$$
$$0{,}37 = \frac{\mathcal{P}(\overline{E}\cap A)}{0{,}55}$$
$$\mathcal{P}(\overline{E}\cap A) = 0{,}55\times 0{,}37$$
$$\mathcal{P}(\overline{E}\cap A) = 0{,}2035$$
Les évènements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :
$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(E\cap A) + \mathcal{P}(\overline{E}\cap A) = 0{,}135 + 0{,}2035$$
$$= 0{,}3385$$

4. On recherche la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}_A(\overline{E})$. Par définition, on a :
$$\mathcal{P}_A(\overline{E}) = \frac{\mathcal{P}(A\cap\overline{E})}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0{,}2035}{0{,}3385}$$
$$\approx 0{,}6011 \approx 0{,}601$$

Exercice 2*

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

- premier temps : étude du dossier présenté par le candidat ;
- deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en oeuvre par l'entreprise est le suivant :

- si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretient par le directeur des ressources humaines ;
- si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests pui est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.

A l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

- 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;
- 20 % des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;
- 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :
   - D l'évènement "*le candidat a un dossier jugé de bonne qualité*" ;
   - R l'évènement "*le candidat est recruté par l'entreprise*".

   a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b. Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.

   c. Montrer que la probabilité de l'évènement $D\cap R$ est égale à 0,24.

   d. En déduire la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité. Compléter l'arbre pondéré réalisé dans la question a..

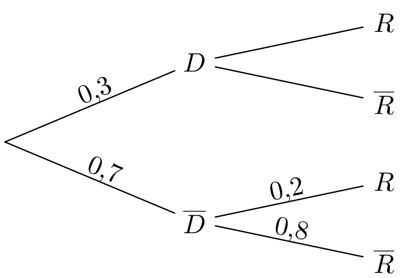
2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

   a. Justifier que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}38$.

   b. Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

Correction 2

1. a. Voici l'arbre pondéré représentant cette situation :



b. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_{\overline{D}}\big(\overline{R}\big)=\frac{\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap\overline{R}\big)}{\mathcal{P}\big(\overline{D}\big)}$$

$$0{,}8=\frac{\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap\overline{R}\big)}{0{,}7}$$

$$\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap\overline{R}\big)=0{,}8\times0{,}7$$

$$\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap\overline{R}\big)=0{,}56$$

c. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_{\overline{D}}\big(R\big)=\frac{\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap R\big)}{\mathcal{P}\big(\overline{D}\big)}$$

$$0{,}2=\frac{\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap R\big)}{0{,}7}$$

$$\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap R\big)=0{,}2\times0{,}7$$

$$\mathcal{P}\big(\overline{D}\cap R\big)=0{,}14$$

Les évènement D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}\big(R\big)=\mathcal{P}\big(R\cap D\big)+\mathcal{P}\big(R\cap\overline{D}\big)$$

$$0{,}38=\mathcal{P}\big(R\cap D\big)+0{,}14$$

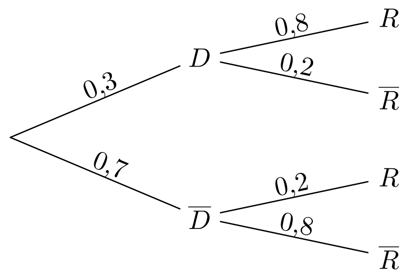
$$\mathcal{P}\big(R\cap D\big)=0{,}38-0{,}14$$

$$\mathcal{P}\big(R\cap D\big)=0{,}24$$

d. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_D\big(R\big)=\frac{\mathcal{P}\big(D\cap R\big)}{\mathcal{P}\big(D\big)}=\frac{0{,}24}{0{,}3}=0{,}8$$

Voici l'arbre complété :



2. a. Le fait de choisir une personne postulant au hasard et de regarder si cette personne est recrutée est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,38.
Le choix des 10 personnes se faisant de manière aléatoire et indépendante et de regarder si chacune des personnes est recruté ou non est un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et 0,38.
Ainsi, la variable $\mathcal{X}$ comptant le nombre de personnes recrutés dans le schéma de Bernoulli précédent est une variable suivant une loi binomiale de paramètres 10 et 0,38 :
$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}\big(10\,;\,0{,}38\big)$.

b. La probabilité demandée est $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant1\big)$:

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant1\big)=1-\mathcal{P}\big(\mathcal{X}<1\big)=1-\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=0\big)$$

$$=1-\binom{10}{0}\times0{,}38^0\times0{,}62^{10}=1-0{,}62^{10}$$

$$\approx0{,}99160\approx0{,}992$$

