

Calcul littéral

1. Développement - Factorisation

Propriétés - Distributivité simple et double

Pour tous réels k, a, b, c et d :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \text{ ou } k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \text{ où } (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Les expressions de gauche sont factorisées et celles de droite sont développées.

Remarque : $(ab)(cd)$ se simplifie en $abcd$. Il n'y a pas de développement s'il n'y a pas de signe +

Exemples :

Développer les expressions suivantes :

$$A = -(x + 3)$$

$$B = (2x + 1)(3x - 4)$$

$$C = (2x - 1)(x + 2)(3x + 2)$$

$$D = \left(\frac{1}{5}u - \frac{1}{14}v\right)\left(\frac{5}{4}u + \frac{7}{3}v\right)$$

$$E = (x\sqrt{2} - 3)(2x + 5\sqrt{2})$$

$b(x)$ du 28

Factoriser les expressions suivantes

$$\text{28 } a(x) = (x-4)(2x+7) + (x-4)(x+1)$$

$$b(x) = (2x+1)(x+2) - (2x+1)(3x+5)$$

$$\text{29 } a(x) = (x+3)(3x-5) - (2x-1)(x+3)$$

$$b(x) = (2x-1)(2x+3) - (2x+3)(7x-6)$$

$$\text{30 } a(x) = (x+2)(x-3) - (x+2)^2$$

$$b(x) = (2x+3)^2 + (x-5)(2x+3)$$

$$\text{31 } a(x) = (7x+3)(4x-1) + 3(4x-1)(2x+1)$$

$$b(x) = (3x+5)(-x+2) - 4(3x+5)(4x+1)$$

$$\text{32 } a(x) = 5(x+2)^2 - 2(x+1)(x+2)$$

$$b(x) = 2(-x+5)(-x+6) - 3(-x+5)(2x+3)$$

$$A = -x - 3$$

$$B = 6x^2 - 8x + 3x - 4 = 6x^2 - 5x - 4$$

$$C = (2x^2 + 3x - 2)(3x + 2) = 6x^3 + 5x^2 + 9x - 4$$

$$D = \frac{1}{4}u^2 + \frac{7}{15}uv - \frac{5}{56}uv - \frac{1}{6}v^2 = \frac{1}{4}u^2 + \frac{217}{840}uv - \frac{1}{6}v^2$$

$$E = 2\sqrt{2}x^2 + 10x - 6x - 15\sqrt{2} = 2\sqrt{2}x^2 + 4x - 15\sqrt{2}$$

$$b(x) = (2x^2 + 3x + 2) - (6x^2 + 13x + 6)$$

$$= 2x^2 + 3x + 2 - 6x^2 - 13x - 6 = -4x^2 - 10x - 4$$

2. Les identités remarquables

Théorème :

Pour tous réels a et b :

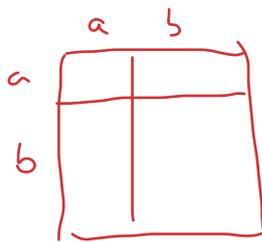
$$(a + b)^2 = \dots \quad a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = \dots \quad a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = \dots \quad a^2 - b^2$$

L'expression de gauche est factorisée et celle de droite développée.

Démonstrations :



$$(a+b)(a+b) = a \times a + ab + ba + b^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Exemples :

■ Développer $(3x + 4)^2$, puis $(5x - 2)(5x + 2)$.

→ Que doit-on faire ?

Développer une expression algébrique.

Cela signifie la transformer en somme (ou en différence) de termes.

→ Comment s'y prendre ?

Pour transformer une écriture, on utilise la **distributivité** ou les **identités remarquables**.

$$9x^2 + 24x + 16$$

$$25x^2 - 4$$

Développer les expressions suivantes

15 $A = (2a + 3b)^2$

$B = (3x - y)^2$

$C = (4u - 5v)^2$

$D = (a - 3b)^2 - (2a + b)^2$

16 $A = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y\right)^2$

$B = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y\right)^2 - (x - y)^2$

17 a. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2$

b. $\left(\frac{2}{3}x + 1\right)\left(\frac{2}{3}x - 1\right)$

c. $\left(\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}\right)^2$

d. $\left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)$

■ Factoriser $A = x^2 - 10x + 25$, puis $B = (4x - 1)^2 - 9(x + 2)^2$.

→ Que doit-on faire ?

Factoriser une expression algébrique, cela signifie la transformer en produit de facteurs.

→ Comment s'y prendre ?

Pour transformer une expression on utilise la **distributivité** ou les **identités remarquables**.

$$(x - 5)^2$$

$$[(4x - 1) - 3(x + 2)][(4x - 1) + 3(x + 2)]$$

$$[4x - 1 - 3x - 6][4x - 1 + 3x + 6]$$

$$(x - 7)(7x + 5)$$

Factoriser les expressions suivantes :

27 a(x) = $x^2 + 10x + 25$

b(x) = $x^2 - 8x + 16$

c(x) = $x^2 - 25$

d(x) = $(x + 1)^2 - 9$

3. Résolution d'équations

Théorème :

Dans \mathbb{R} , un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Méthode usuelle

Etape 1 : on ramène l'équation à résoudre à une équation du type $A(x) = 0$.

Etape 2 : on factorise $A(x)$ en l'écrivant sous la forme d'un produit de facteurs

Etape 3 : on utilise le théorème.

Exemples :

Résoudre dans \mathbb{R} les deux équations suivantes :

$$(5x + 3)^2 = 4$$

$$\begin{aligned} (5x-3)^2 - 4 &= 0 \\ (5x-3)^2 - 2^2 &= 0 \\ ((5x-3) - 2)((5x-3) + 2) &= 0 \\ (5x-5)(5x-1) &= 0 \\ 5x-5=0 &\text{ équivaut à } \\ x=1 & \\ 5x-1=0 &\text{ équivaut à } \\ x=\frac{1}{5} & \quad S = \left\{ \frac{1}{5}; 1 \right\} \end{aligned}$$

$$3(2x + 7)(2x - 4) = 4(x + 4)(2x + 7)$$

$$\begin{aligned} 3(2x+7)(2x-4) - 4(x+4)(2x+7) &= 0 \\ (2x+7)[3(2x-4) - 4(x+4)] &= 0 \\ (2x+7)(6x-12-4x-16) &= 0 \\ (2x+7)(2x-28) &= 0 \\ 2x+7=0 &\text{ équivaut à } x = -\frac{7}{2} \\ 2x-28=0 &\text{ équivaut à } x = \frac{28}{2} = 14 \\ S &= \left\{ -\frac{7}{2}; 14 \right\} \end{aligned}$$

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

37 a. $(x+1)(x-3)=0$ b. $(x-7)(2x+1)=0$
c. $(3x-1)(3x+2)=0$ d. $(x-5)^2=0$

38 a. $x^2-81=0$ b. $(x+3)^2=4$
c. $x^2=5$ d. $x^2+2x+1=25$

39 a. $(x-4)(2x-5)=0$ b. $(-4x+1)(-6x-3)=0$
c. $x^2-25=0$ d. $x^2+16=0$
e. $(x+1)(2x+3)+(x+1)(3x-2)=0$

40 a. $(3x+1)(2x-5)-(2x-5)(4x-3)=0$
b. $4x^2=9$ c. $(x-3)^2=100$
d. $(3x+1)^2=(5x-3)^2$ e. $(3x+1)^2=-4$

41 a. $(3x+1)(2x-5)-4(2x-5)(4x-3)=0$
b. $x(x-1)=x(2x+5)$

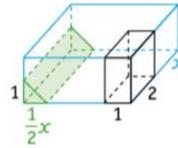
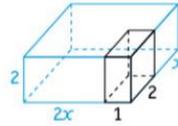
c. $(x+3)^2=x+3$ d. $(x+1)^2=9(5x-3)^2$

42 a. $(x+4)^2=16(2x-5)^2$
b. $(7x+21)(-5x+8)=4(2x-7)(4x+12)$
c. $(2x+3)(2x-4)=x^2-4$
d. $9x^2-6x+1=x^2+4x+4$

43 a. $x^2-9+3(x^2-6x+9)=x-3$
b. $(4x-1)(4x-2)=-7(x-1)(14x-7)$
c. $(6x+2)^2=3x+1$ d. $3(x+1)^2=5(5x-3)^2$

Problème :

Patrick dispose d'un lavoir (en noir) de largeur 1, de longueur 2 et de hauteur 2. Il décide de l'agrandir pour en faire une piscine. La largeur est augmentée de $2x$, la longueur de x et la hauteur reste inchangée. L'unité de la longueur utilisée est le mètre et $x > 0$.



1. Exprimer $a(x)$, le volume de la piscine, en fonction de x .

2. Patrick décide d'ajouter la partie verte, de hauteur 1, de largeur $\frac{1}{2}x$ et de même longueur que la piscine. On note $b(x)$ le volume de la partie verte. Exprimer $b(x)$ en fonction de x .

3. On note $c(x)$ le volume d'eau nécessaire (en m^3) pour remplir cette piscine. Démontrer que $c(x) = (x+2)\left(\frac{15}{4}x+2\right)$.

4. Développer l'expression de $c(x)$.

5. Patrick souhaite trouver la valeur de x pour laquelle la piscine a un volume est $38 m^3$.

a. Démontrer que x vérifie l'équation : $15x^2 + 38x - 136 = 0$.

b. Développer $(15x+68)(x-2)$, puis en déduire la valeur de x .

Solution

1. La largeur de la piscine est de $2x+1$, la longueur de $x+2$ et la hauteur de 2 ; donc :

$$a(x) = (2x+1)(x+2) \times 2, \text{ soit } a(x) = 2(2x+1)(x+2).$$

2. Le volume vert est un prisme ayant pour base un triangle rectangle d'aire $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x \times 1 = \frac{1}{4}x$

$$\text{et de longueur } x+2 ; \text{ ainsi } b(x) = \frac{1}{4}x(x+2).$$

$$\begin{aligned} 3. c(x) &= a(x) - b(x) = 2(2x+1)(x+2) - \frac{1}{4}x(x+2) \\ &= (x+2) \left[2(2x+1) - \frac{1}{4}x \right] = (x+2) \left(\frac{15}{4}x + 2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. c(x) &= (x+2) \left(\frac{15}{4}x + 2 \right) = \frac{15}{4}x^2 + 2x + \frac{15}{2}x + 4 \\ &= \frac{15}{4}x^2 + \frac{19}{2}x + 4 \end{aligned}$$

$$5.a. c(x) = 38 \text{ équivaut à } \frac{15}{4}x^2 + \frac{19}{2}x + 4 = 38$$

$$\frac{15}{4}x^2 + \frac{19}{2}x + 4 - 38 = 0$$

$$\text{d'où } 15x^2 + 38x - 136 = 0.$$

$$b. (15x+68)(x-2) = 15x^2 - 30x + 68x - 136 = 15x^2 + 38x - 136$$

$$c(x) = 0 \text{ équivaut à } (15x+68)(x-2) = 0$$

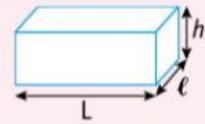
$$15x+68=0 \text{ ou } x-2=0, \text{ d'où } x = -\frac{68}{15} \text{ ou } x=2.$$

x étant positif la seule solution est $x=2$.

Méthode

→ Le volume d'un parallélépipède rectangle est :

$$V = L \times \ell \times h$$



Le volume d'un prisme de base d'aire B et de hauteur h est :

$$V = B \times h$$



→ On remarque la présence d'un facteur commun : $x+2$

→ Pour développer on utilise la double distributivité :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

→ On ajoute -38 à chaque membre puis on multiplie chaque membre par 4.

→ On utilise encore la double distributivité pour développer.

→ Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.

4. Manipulation d'inégalités et résolution d'équations

Définition :

Quelques soient les nombres a et b , on dit que $a < b$ lorsque $b - a > 0$.

Théorème :

Quels que soient les réels a, b, c, d et k ,

- si $a < b$ alors $a + c < b + c$ [1]
- si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$. [2]
- si $a < b$ alors
 - si $k > 0$ alors $k \times a < k \times b$ [3]
 - si $k < 0$ alors $k \times a > k \times b$ [4]

Remarque :

- [1] permet de justifier la transposition additive **avec** changement de signe :
 $x - 1 \geq 0$ équivaut à $(x - 1 + 1 \geq +1)$ équivaut à $x \geq 1$
- [3] et [4] permettent de justifier la transposition multiplicative **sans** changement de signe :
 $3x > 2$ équivaut à $\left(\frac{1}{3}\right) \times (3x) > \frac{1}{3} \times 2$ équivaut à $\frac{1}{3} \times 3 \times x > \frac{2}{3}$ équivaut à $x > \frac{2}{3}$

Démonstrations:

Démonstration

$b + c - (a + c) = b + c - a - c = b - a$
 Or $a < b$, donc $b - a > 0$
 Donc $b + c - (a + c) > 0$
 ce qui prouve que $a + c < b + c$.

Démonstration

$b + d - (a + c) = b + d - a - c = (b - a) + (d - c)$
 or $a < b$, donc $b - a > 0$;
 et $c < d$, donc $d - c > 0$.
 Ce qui prouve que $(b - a) + (d - c) > 0$.
 D'où $a + c < b + d$.

Démonstration

• 1^{er} cas : $c > 0$

Dans ce cas $b - a$ et c sont deux réels strictement positifs, donc le produit $(b - a)c$ est strictement positif.
 $bc - ac > 0$, ce qui signifie que $ac < bc$.

• 2^e cas : $c < 0$

Dans ce cas $b - a$ est un réel strictement positif et c un réel strictement négatif, donc le produit $(b - a)c$ est strictement négatif.
 $bc - ac < 0$, ce qui signifie que $ac > bc$.

Exemple :

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $4x + 1 > 0$.**2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $3x + 5 > 5x + 1$.****→ Que doit-on faire ?**Résoudre dans \mathbb{R} une inéquation, dont l'inconnue est x , c'est trouver les valeurs de x qui vérifient l'inéquation.**→ Comment s'y prendre ?**On utilise les théorèmes sur les inégalités pour aboutir à une expression de la forme $x < \dots$ ou $x > \dots$

1) $4x + 1 > 0$

$4x + 1 - 1 > -1$

$4x > -1$

$S =]-\frac{1}{4}; +\infty[$

$\frac{1}{4}(4x) > -1(\frac{1}{4})$

$x > -\frac{1}{4}$

2) $3x + 5 > 5x + 1$

$3x - 5x + 5 > 5x - 5x + 1$

$-2x + 5 > 1$

$-2x + 5 - 5 > 1 - 5$

$-2x > -4$

$-\frac{1}{2}(-2x) < -3(-\frac{1}{2})$

$x < \frac{3}{2}$

$S =]-\infty; \frac{3}{2}[$

Pour les exercices 49 à 53, résoudre chaque inéquation. On notera S l'ensemble des solutions et on représentera S sur l'axe des réels.

49 a. $2x + 5 > 11$

b. $6x - 5 \geq 4x + 2$

c. $-3x + 7 > 10$

d. $3x + 4 \leq 4x - 4$

50 a. $4x - 2 < 7$

b. $2x - 5 > 5x + 2$

c. $-5x + 6 \leq -3$

d. $-6x + 3 < -x - 2$

51 a. $\frac{1}{3}x + 2 > x - 5$

b. $\frac{6}{5}x + \frac{2}{5} \geq x + \frac{7}{10}$

c. $\frac{2}{5}x + 1 \leq \frac{4}{5}x + 3$

d. $-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x < -\frac{1}{2}x + 3$

52 a. $\frac{7}{2}x + \frac{7}{2} > \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$

b. $-\frac{3}{7}x + \frac{5}{9} < -\frac{7}{3}x + 1$

c. $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} \leq \frac{7}{5}x + \frac{2}{7}$

d. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{2}x + 2$

53 a. $2x + \frac{1}{3} > -\frac{1}{3} + \frac{x}{2}$

b. $-\frac{1}{13}x + 3 \leq \frac{11}{13} - x$

c. $\frac{99}{100}x + 1 > -\frac{x}{100} + \frac{1}{3}$

d. $-\frac{3}{7}x + \frac{5}{8} \geq 2 + \frac{1}{2}x$

Exemple :

■ Soit x et y deux réels tels que $-5 < x < 7$ et $-2 < y < 1$.**Démontrer que $-13 < 2x - 3y < 20$.**

$-5 < x < 7$

$-10 < 2x < 14$

$-2 < y < 1$

$-3 < -3y < 6$

$-10 - 3 < 2x - 3y < 14 + 6$

$-13 < 2x - 3y < 20$

47 Pour les réels x et y , si $x < 5$ et $y < 7$, quelle inégalité peut-on écrire dans chaque cas ?

a. $5x$

b. $2x + y$

c. $x + 2y$

d. $x + y$

48 Pour les réels x et y , si $x < 2$ et $y > 1$, quelle inégalité peut-on écrire dans chaque cas ?

a. $2x$

b. $-y$

c. $2x - y$

d. $x - yw$

5. Racines carrées

Définition :

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a est l'unique réel positif dont le carré est égal à a .

Pour tout $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$

Remarques : $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

Propriétés :

Soient a et b deux nombres réels positifs. On a alors :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Si a et b sont strictement positifs alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- Pour tout nombre a , on $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemples : Simplifier :

$$\sqrt{150} = \dots$$

$$\sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} = \dots$$

$$\sqrt{8} \times \sqrt{50} = \dots$$

$$\sqrt{\frac{35}{3}} \times \sqrt{\frac{21}{5}} = \dots$$

$$M = \sqrt{150} = \sqrt{6 \times 25} = \sqrt{6} \times \sqrt{25} = \sqrt{6} \times 5 = 5\sqrt{6}$$

$$N = \sqrt{8} \times \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 4} \times \sqrt{2 \times 25} \\ = 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \\ = 10 \times (\sqrt{2})^2 = 10 \times 2 = 20$$

$$Q = \sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} = |1 - \sqrt{7}| \text{ or } 1 - \sqrt{7} < 0 \text{ donc} \\ |1 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 1 \text{ ainsi :}$$

$$Q = \sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} = \sqrt{7} - 1$$

$$P = \sqrt{\frac{35}{3}} \times \sqrt{\frac{21}{5}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7 \times 5}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3 \times 7}}{\sqrt{5}} \\ = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$$

Démonstrations :

DÉMONSTRATION

1. On considère a et b des nombres réels positifs. On en déduit que $ab \geq 0$ donc $(\sqrt{ab})^2 = ab$.
De plus, $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \sqrt{b}^2 = ab$.

Ainsi, \sqrt{ab} et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré : ils sont donc égaux.

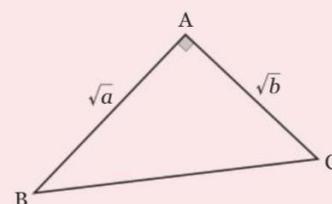
2. Avec $b \neq 0$, on a $\frac{a}{b} \geq 0$ donc $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \frac{a}{b}$. De plus, $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$.

Par conséquent, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré : ils sont donc égaux.

3. Considérons le triangle rectangle ABC ci-contre. D'après le théorème de Pythagore, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2} = \sqrt{a+b}$.

Les points ne sont pas alignés. L'inégalité triangulaire nous donne par ailleurs $BC < AB + AC$.

On a alors : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.



Définition

Soit a, b des nombres, $a - b$ est la quantité de $a + b$. Et réciproquement.

- Exemples :** La quantité conjuguée de $3 + \sqrt{2}$ est $3 - \sqrt{2}$
 La quantité conjuguée de $5 - \sqrt{2}$ est $5 + \sqrt{2}$
 La quantité conjuguée de $-7 + 3\sqrt{2}$ est $-7 - 3\sqrt{2}$

Théorème

Soit a, b, c, d des nombres quelconques appartenant à \mathbb{Q} avec $d > 0$ et $b + c\sqrt{d} \neq 0$
 Soit $A = \frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ pour écrire A avec un dénominateur rationnel, on multiplie numérateur et dénominateur par $b - c\sqrt{d}$ (en ayant préalablement démontré que $b - c\sqrt{d}$ est un réel non nul).

Démonstration :

$$A = \frac{a}{b+c\sqrt{d}} = \frac{a(b-c\sqrt{d})}{(b+c\sqrt{d})(b-c\sqrt{d})} = \frac{a(b-c\sqrt{d})}{b^2+c^2d} \quad \text{avec } b^2+c^2d \in \mathbb{Q}$$

Exemples :

Rendre rationnel le dénominateur des expressions $A = \frac{1}{6-\sqrt{2}}$, $B = \frac{3}{5-\sqrt{2}}$ et $C = \frac{5-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}$

• Pour l'expression de A, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $6+\sqrt{2}$.

$$A = \frac{1}{6-\sqrt{2}} = \frac{6+\sqrt{2}}{(6-\sqrt{2})(6+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{6+\sqrt{2}}{6^2-\sqrt{2}^2}$$

$$= \frac{6+\sqrt{2}}{36-2}$$

$$= \frac{6+\sqrt{2}}{34}$$

• Pour l'expression B, on multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de $5-\sqrt{2}$, c'est-à-dire par $5+\sqrt{2}$:

$$B = \frac{3}{5-\sqrt{2}} = \frac{3 \times (5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{15+3\sqrt{2}}{5^2-\sqrt{2}^2}$$

$$= \frac{15+3\sqrt{2}}{25-2}$$

$$= \frac{15+3\sqrt{2}}{23}$$

On a tout d'abord vérifié que la quantité conjuguée $6+\sqrt{2}$ était bien différente de 0.

• Pour l'expression C, on multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de $2-\sqrt{6}$, c'est-à-dire par $2+\sqrt{6}$:

$$C = \frac{5-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} = \frac{(5-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})} = \frac{5 \times 2 + 5\sqrt{6} - \sqrt{6} \times 2 - \sqrt{6}^2}{2^2 - \sqrt{6}^2}$$

$$= \frac{10+3\sqrt{6}-6}{4-6} = \frac{4+3\sqrt{6}}{-2} = -\frac{4+3\sqrt{6}}{2}$$

On peut aussi écrire $C = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

Rappel : $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

6. Les puissance

Rappels :

Pour tous réels $a, b \neq 0$ et n et p relatifs :

$$(a^n)^p = a^{n \times p} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n \quad b^0 = 1$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad b^1 = b$$

Exemples :

Simplifier les nombres suivants où a et b sont deux réels non nuls :

$$A = (a^{-5})^3 \quad B = (a^3)^3 \times a^{-6} \quad C = b^{-5} a^4 (ab)^3$$

$$D = ((a^2)^3)^4 \times a^{-24} \quad E = \frac{(ab)^7}{(a^2b)^3 \times b^4} \quad F = \frac{(a^{-5})^3}{((a^2)^3)^4}$$

$$A = (a^{-5})^3 = a^{-5 \times 3} = a^{-15}$$

$$B = (a^3)^3 \times a^{-6} = a^{3 \times 3} \times a^{-6} = a^9 \times a^{-6} = a^{9-6} = a^3$$

$$C = b^{-5} a^4 (ab)^3 = b^{-5} a^4 a^3 b^3 = a^{4+3} b^{-5+3} = a^7 b^{-2}$$

$$D = ((a^2)^3)^4 \times a^{-24} = a^{2 \times 3 \times 4} \times a^{-24} \\ = a^{24} \times a^{-24} = a^0 = 1$$

$$E = \frac{(ab)^7}{(a^2b)^3 \times b^4} = \frac{a^7 b^7}{a^6 b^3 \times b^4} = a^{7-6} b^{7-7} = a$$

$$F = \frac{(a^{-5})^{-3}}{((a^2)^3)^4} = \frac{a^{15}}{a^{24}} = a^{15} \times a^{-24} = a^{-9}$$