Calcul littéral

1. Développement - Factorisation

Propriétés – Distributivité simple et double

> Pour tous réels k, a, b, c et d :
>
> $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ ou $k(a + b) = ka + kb$
>
> $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ où $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
>
> Les expressions de gauche sont factorisées et celles de droite sont développées.

Remarque : $(ab)(cd)$ se simplifie en $abcd$. Il n'y a pas de développement s'il n'y a pas de signe +

Exemples :

Développer les expressions suivantes :

$A = -(x + 3)$

$B = (2x + 1)(3x - 4)$

$C = (2x - 1)(x + 2)(3x + 2)$

$D = (\frac{1}{5}u - \frac{1}{14}v)(\frac{5}{4}u + \frac{7}{3}v)$

$E = (x\sqrt{2} - 3)(2x + 5\sqrt{2})$

$b(x)$ du 28

Factoriser les expressions suivantes :

28 $a(x) = (x-4)(2x+7)+(x-4)(x+1)$
$b(x) = (2x+1)(x+2)-(2x+1)(3x+5)$

29 $a(x) = (x+3)(3x-5)-(2x-1)(x+3)$
$b(x) = (2x-1)(2x+3)-(2x+3)(7x-6)$

30 $a(x) = (x+2)(x-3)-(x+2)^2$
$b(x) = (2x+3)^2+(x-5)(2x+3)$

31 $a(x) = (7x+3)(4x-1)+3(4x-1)(2x+1)$
$b(x) = (3x+5)(-x+2)-4(3x+5)(4x+1)$

32 $a(x) = 5(x+2)^2-2(x+1)(x+2)$
$b(x) = 2(-x+5)(-x+6)-3(-x+5)(2x+3)$

2. Les identités remarquables

Théorème :

Pour tous réels a et b :

$(a+b)^2 = \cdots$

$(a-b)^2 = \cdots$

$(a-b)(a+b) = \cdots$

L'expression de gauche est factorisée et celle de droite développée.

Démonstrations :

Exemples :

■ **Développer $(3x+4)^2$, puis $(5x-2)(5x+2)$.**

➜ **Que doit-on faire ?**

Développer une expression algébrique.
Cela signifie la transformer en somme (ou en différence) de termes.

➜ **Comment s'y prendre ?**

Pour transformer une écriture, on utilise la distributivité ou les identités remarquables.

Développer les expressions suivantes

15 $A=(2a+3b)^2$ $B=(3x-y)^2$
$C=(4u-5v)^2$ $D=(a-3b)^2-(2a+b)^2$

16 $A=\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y\right)^2$ $B=\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}y\right)^2-(x-y)^2$

17 **a.** $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2$ **b.** $\left(\frac{2}{3}x+1\right)\left(\frac{2}{3}x-1\right)$
c. $\left(\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}\right)^2$ **d.** $\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)$

■ **Factoriser $A=x^2-10x+25$, puis $B=(4x-1)^2-9(x+2)^2$.**

➜ **Que doit-on faire ?**

Factoriser une expression algébrique, cela signifie la transformer en produit de facteurs.

➜ **Comment s'y prendre ?**

Pour transformer une expression on utilise la distributivité ou les identités remarquables.

Factoriser les expressions suivantes :

27 $a(x)=x^2+10x+25$ $b(x)=x^2-8x+16$
$c(x)=x^2-25$ $d(x)=(x+1)^2-9$

3. Résolution d'équations

Théorème :

Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si …………………… l'un des facteurs est nul.

Méthode usuelle

Etape 1 : on ramène l'équation à résoudre à une équation du type $A(x) = 0$.
Etape 2 : on factorise A(x) en l'écrivant sous la forme d'un produit de facteurs
Etape 3 : on utilise le théorème.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :

$(5x + 3)^2 = 4$

$3(2x + 7)(2x - 4) = 4(x + 4)(2x + 7)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

37 a. $(x+1)(x-3)=0$ b. $(x-7)(2x+1)=0$
c. $(3x-1)(3x+2)=0$ d. $(x-5)^2=0$

38 a. $x^2-81=0$ b. $(x+3)^2=4$
c. $x^2=5$ d. $x^2+2x+1=25$

39 a. $(x-4)(2x-5)=0$ b. $(-4x+1)(-6x-3)=0$
c. $x^2-25=0$ d. $x^2+16=0$
e. $(x+1)(2x+3)+(x+1)(3x-2)=0$

40 a. $(3x+1)(2x-5)-(2x-5)(4x-3)=0$
b. $4x^2=9$ c. $(x-3)^2=100$
d. $(3x+1)^2=(5x-3)^2$ e. $(3x+1)^2=-4$

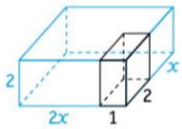
41 a. $(3x+1)(2x-5)-4(2x-5)(4x-3)=0$
b. $x(x-1)=x(2x+5)$
c. $(x+3)^2=x+3$ d. $(x+1)^2=9(5x-3)^2$

42 a. $(x+4)^2=16(2x-5)^2$
b. $(7x+21)(-5x+8)=4(2x-7)(4x+12)$
c. $(2x+3)(2x-4)=x^2-4$
d. $9x^2-6x+1=x^2+4x+4$

43 a. $x^2-9+3(x^2-6x+9)=x-3$
b. $(4x-1)(4x-2)=-(7x-1)(14x-7)$
c. $(6x+2)^2=3x+1$ d. $3(x+1)^2=5(5x-3)^2$

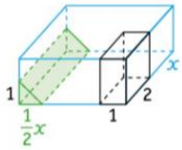
Problème :

Patrick dispose d'un lavoir (en noir) de largeur 1, de longueur 2 et de hauteur 2. Il décide de l'agrandir pour en faire une piscine. La largeur est augmentée de $2x$, la longueur de x et la hauteur reste inchangée. L'unité de la longueur utilisée est le mètre et $x > 0$.



1. Exprimer $a(x)$, le volume de la piscine, en fonction de x.

2. Patrick décide d'ajouter la partie verte, de hauteur 1, de largeur $\frac{1}{2}x$ et de même longueur que la piscine. On note $b(x)$ le volume de la partie verte. Exprimer $b(x)$ en fonction de x.



3. On note $c(x)$ le volume d'eau nécessaire (en m^3) pour remplir cette piscine. Démontrer que $c(x) = (x+2)\left(\frac{15}{4}x + 2\right)$.

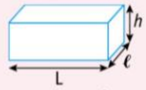
4. Développer l'expression de $c(x)$.

5. Patrick souhaite trouver la valeur de x pour laquelle la piscine a un volume est 38 m^3.

a. Démontrer que x vérifie l'équation : $15x^2 + 38x - 136 = 0$.

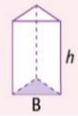
b. Développer $(15x+68)(x-2)$, puis en déduire la valeur de x.

Le volume d'un parallélépipède rectangle est :



$V = L \times \ell \times h$

Le volume d'un prisme de base d'aire B et de hauteur h est :



$V = B \times h$

4. Manipulation d'inégalités et résolution d'équations

Définition :

Quelques soient les nombres a et b, on dit que a<b lorsque $b - a > 0$.

Théorème :

Quels que soient les réels a, b, c, d et k,

- si a<b alors $a + c < b + c$ [1]
- si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$. [2]
- si a<b alors
  - si $k > 0$ alors $k \times a < k \times b$ [3]
  - si $k < 0$ alors $k \times a > k \times b$ [4]

Remarque :

- [1] permet de justifier la transposition additive **avec** changement de signe :
$x - 1 \geq 0$ équivaut à $(x - 1 + 1 \geq +1)$ équivaut à $x \geq 1$
- [3]et [4] permettent de justifier la transposition multiplicative **sans** changement de signe :
$3x > 2$ équivaut à $\left(\frac{1}{3}\right) \times (3x) > \frac{1}{3} \times 2$ équivaut à $\frac{1}{3} \times 3 \times x > \frac{2}{3}$ équivaut à $x > \frac{2}{3}$

Démonstrations:

Exemple :

1. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x+1>0$.**

2. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x+5>5x+1$.**

➜ **Que doit-on faire ?**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation, dont l'inconnue est x, c'est trouver les valeurs de x qui vérifient l'inéquation.

➜ **Comment s'y prendre ?**
On utilise les théorèmes sur les inégalités pour aboutir à une expression de la forme $x<\ldots$ ou $x>\ldots$.

Pour les exercices 49 à 53, résoudre chaque inéquation. On notera S l'ensemble des solutions et on représentera S sur l'axe des réels.

49 **a.** $2x+5>11$ **b.** $6x-5\geqslant 4x+2$
c. $-3x+7>10$ **d.** $3x+4\leqslant 4x-4$

50 **a.** $4x-2<7$ **b.** $2x-5>5x+2$
c. $-5x+6\leqslant -3$ **d.** $-6x+3<-x-2$

51 **a.** $\frac{1}{3}x+2>x-5$ **b.** $\frac{6}{5}x+\frac{2}{5}\geqslant x+\frac{7}{10}$
c. $\frac{2}{5}x+1\leqslant\frac{4}{5}x+3$ **d.** $-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}x<-\frac{1}{2}x+3$

52 **a.** $\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}>\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}$ **b.** $-\frac{3}{7}x+\frac{5}{9}<-\frac{7}{3}x+1$
c. $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}\leqslant\frac{7}{5}x+\frac{2}{7}$ **d.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{2}x+2$

53 **a.** $2x+\frac{1}{3}>-\frac{1}{3}+\frac{x}{2}$ **b.** $-\frac{1}{13}x+3\leqslant\frac{11}{13}-x$
c. $\frac{99}{100}x+1>-\frac{x}{100}+\frac{1}{3}$ **d.** $-\frac{3}{7}x+\frac{5}{8}\geqslant 2+\frac{1}{2}x$

Exemple :

■ **Soit x et y deux réels tels que $-5<x<7$ et $-2<y<1$.**
Démontrer que $-13<2x-3y<20$.

47 Pour les réels x et y, si $x<5$ et $y<7$, quelle inégalité peut-on écrire dans chaque cas ?
a. $5x$ **b.** $2x+y$
c. $x+2y$ **d.** $x+y$

48 Pour les réels x et y, si $x<2$ et $y>1$, quelle inégalité peut-on écrire dans chaque cas ?
a. $2x$ **b.** $-y$
c. $2x-y$ **d.** $x-y$w

5. Racines carrées

Définition :

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a est l'unique réel positif dont le carré est égal à a .

Pour tout $a \geq 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Remarques : $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

Propriétés :

Soient a et b deux nombres réels positifs. On a alors :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Si a et b sont strictement positifs alors $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$
- Pour tout nombre a, on $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemples : Simplifier :

$\sqrt{150} = \cdots$

$\sqrt{8} \times \sqrt{50} = \cdots$

$\sqrt{(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{7}})^2}$=.....

$\sqrt{\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{3}}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{5}}}$=....

Démonstrations :

Définition

Soit a, b des nombres, $a - b$ est la quantité …………… de $a + b$. Et réciproquement.

Exemples : La quantité conjuguée de $3 + \sqrt{2}$ est …….

La quantité conjuguée de $5 - \sqrt{2}$ est …….

La quantité conjuguée de $-7 + 3\sqrt{2}$ est …….

Théorème

Soit a, b, c, d des nombres quelconques appartenant à $\mathbb{Q}$ avec $d > 0$ et $b + c\sqrt{d} \neq 0$

Soit $A = \frac{a}{b+c\sqrt{d}}$, pour écrire A avec un dénominateur rationnel, on multiplie numérateur et dénominateur par $b - c\sqrt{d}$ (en ayant préalablement démontré que $b - c\sqrt{d}$ est un réel non nul).

Démonstration :

Exemples :

Rendre rationnel le dénominateur des expressions $A = \frac{1}{6-\sqrt{2}}$, $B = \frac{3}{5-\sqrt{2}}$ et $C = \frac{5-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}$

,

6. Les puissances

Rappels :

Pour tous réels $a, b \neq 0$ et n et p relatifs :		
$(a^n)^p = a^{n\times p}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$b^0 = 1$
$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$b^1 = b$

Exemples :

Simplifier les nombres suivants où a et b sont deux réels non nuls :

$\mathrm{A} = (a^{-5})^3$ $\qquad$ $\mathrm{B} = (a^3)^3 \times a^{-6}$ $\qquad$ $\mathrm{C} = b^{-5}a^4(ab)^3$

$\mathrm{D} = ((a^2)^3)^4 \times a^{-24}$ $\qquad$ $\mathrm{E} = \dfrac{(ab)^7}{(a^2b)^3 \times b^4}$ $\qquad$ $\mathrm{F} = \dfrac{(a^{-5})^3}{((a^2)^3)^4}$