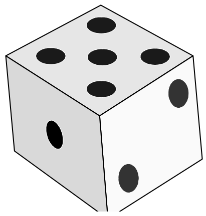
Probabilités



1. Rappels et compléments

1.1 Vocabulaire des évènements

Définition 1 :

Dans une **expérience aléatoire**, *l'univers* est l'ensemble des résultats possibles.

- Un **événement** est une partie de l'univers.
- Un événement qui ne contient aucun élément est appelé est **événement impossible**, aucun résultat ne se réalise.
- Un événement qui contient tous les éléments de l'univers est un **événement certain**.
- *Un* **événement élémentaire** est un événement possédant un seul élément.

L'événement « A **et** B », notée $A \cap B$, est la partie de l'univers qui contient les éléments appartenant à A et à B.
L'événement « A **ou** B » , notée $A \cup B$, est la partie de l'univers qui contient les éléments appartenant à A ou à B.
Des événements A, B sont *incompatibles*, si et seulement si :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \text{ ce qui équivaut à } p(A \cap B) = \emptyset.$$

L'événement *contraire* d'un événement A , noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de n'appartenant pas à A.

1.2 Probabilité d'un événement

Définition 1 :

Dans une expérience aléatoire, l'***univers*** $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; ...; \omega_n\}$ est l'ensemble de toutes les issues possibles.
Définir une ***loi de probabilité*** sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un nombre p_i **positif ou nul** de telle façon que $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$. Ce nombre p_i est appelé ***probabilité*** de l'issue ω_i.

Définition 2

Soit Ω un univers fini. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Propriétés

1 Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire et $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

2 $P(\varnothing) = 0$ $\qquad$ $P(\Omega) = 1$ $\qquad$ $0 \leq p(A) \leq 1$

3 Pour tous événements A et B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Cas particulier : l'équiprobabilité

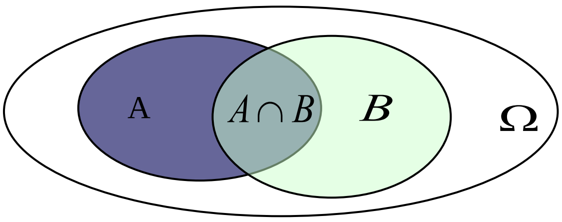
L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Si les n événements élémentaires sont équiprobables, chacun a la probabilité

Dans le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité d'un événement A, est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de résultats de } A}{\text{nombre de résultats de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas } \textit{favorables}}{\text{nombre de cas } \textit{possibles}}$$

Pour dénombrer, on utilise généralement l'un de ces trois schémas suivants:

Diagramme de Venn



Arbre des événements

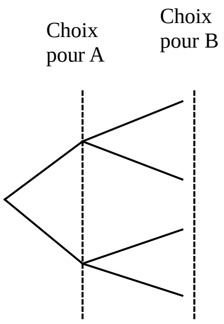


Diagramme de Caroll

Alice au pays des merveilles, c'est lui !!!!!

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$		
A		

2 Conditionnement

2.1 Probabilité d'un événement A sachant que B est réalisé

Définition :

Dans l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on considère un événement B tel que $p(B) \neq 0$

- Pour tout événement A, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $p_B(A)$, le nombre $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
- L'égalité précédente permet d'exprimer la probabilité de l'intersection : $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ ou $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

2.2 Représentation à l'aide d'un arbre de probabilités

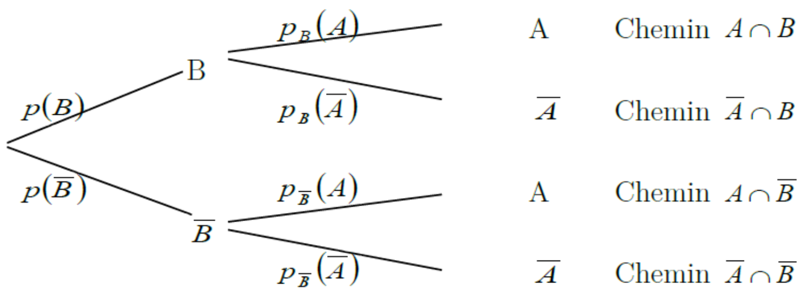
Dans l'univers d'une expérience aléatoire, on considère un événement B de probabilité différente de 0 et de 1.

Étant donné un événement A conditionné par l'événement B, on visualise la situation à l'aide d'un arbre :

- Une branche est représentée par un segment ; chacun porte une probabilité
- Un nœud est la jonction de deux ou plusieurs branches
- Un chemin est l'événement réalisé en suivant des branches successives.
-

Règles

- Sur les branches du 1^er^ niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants
- Sur les branches du 2^ème^ niveau, on inscrit les **probabilités conditionnelles**
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (***Loi des nœuds***).
- La probabilité d'un chemin (intersection des événements) est le produit des probabilités portées sur ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.



3. Formule des probabilités totales

Définition

Dire que des événements forment une partition de l'ensemble E des issues signifie qu'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion est E.

Si B est un événement, alors B et $\overline{B}$ forment une partition de E car $B \cap \overline{B} = \emptyset$ et $B \cup \overline{B} = E$

<u>Formule des probabilités totales</u>

Les événements $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de E.

Alors pour tout événement A:

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n)$$

Dans le cas général, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$

On a : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ ou $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

<u>4. Indépendance de deux évènements</u>

<u>Définition</u>: Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

<u>Propriété</u>: A est un évènement de probabilité non nulle.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$