Le nombre dérivé

1. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Chute libre d'une balle (Le Livre scolaire)

La chute d'une balle de tennis a été prise en photos à intervalles réguliers de 0,02 seconde (chronophotographie). Des mesures de la distance $d(t)$ parcourue par la balle (en mètre) en fonction du temps t (en seconde) sont effectuées et sont données dans le tableau suivant.

t	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$d(t)$	0,29	0,327	0,388	0,446	0,509	0,575	0,644

La vitesse moyenne v d'un objet est le quotient de la distance parcourue d par le temps t mis pour la parcourir. Avec les données de l'exercice, on l'exprime en mètre par seconde (m·s⁻¹) : $v=\frac{d}{t}$.

1 Calculer la vitesse moyenne de la balle entre 0,26 s et 0,30 s, entre 0,28 s et 0,32 s puis entre 0,30 s et 0,34 s. La vitesse moyenne obtenue est-elle la même pour une même durée ? Expliquer pourquoi.

2 On admet que, pour tout $t>0$, $d(t)=5t^2$. Soit $h>0$. Exprimer, en fonction de h, la vitesse moyenne entre deux instants très proches $t=0{,}3+h$ et $t=0{,}3$.

3 On prend des valeurs très proches de 0 pour h. Calculer la vitesse moyenne (en m·s⁻¹) pour $h=0{,}1$, pour $h=0{,}01$, pour $h=0{,}001$ et pour $h=0{,}0001$.

1. Taux de variation

Un point mobile M se déplace sur un axe selon la loi horaire $t\mapsto d(t)$, $d(t)$ est la distance parcourue par M à l'instant t depuis l'origine.

La vitesse moyenne de M entre les instants t_0 et t_0+h (avec $h\neq 0$) est : $\dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$.

Définition 1 **(Taux de variation):**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ sont deux réels de I avec $h\neq 0$.

Le rapport $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(h)}{h}$ s'appelle le <u>taux de variation</u> de la fonction f entre a et $a+h$.

La vitesse instantanée sera donnée par la limite de la vitesse moyenne lorsque h tend vers 0.

<u>2. Nombre dérivé</u>

Exemple

La distance parcourue par un point mobile M sur un axe est donnée à l'instant t ($t \geq 0$) par $d(t)=t^2$.

La vitesse moyenne du point M entre les instants 3 et 3+h (avec $h \neq 0$ et $(3+h \geq 0)$ est :

$$\tau(h)=\frac{d(3+h)-d(3)}{h}=\frac{(3+h)^2-9}{h}=6+h$$

Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, $\tau(h)$ prend des valeurs de plus en plus proches de 6.

On dit que la limite en 0 de $\tau(h)$ est 6. On écrit $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=6$.

Cette limite est la vitesse instantanée du point M à l'instant t=3

De façon générale, on pose les définitions suivantes :

<u>Définition 1</u> (limite en 0):

Soit g une fonction définie sur un voisinage de 0, l un réel. Dire que $\tau(x)$ tend vers l lorsque x tend vers zéro signifie que $\tau(x)$ peut être rendu aussi proche de l que l'on veut pour tout x suffisamment proche de 0. On dit encore que τ admet l pour limite en zéro et on écrit : $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=l$.$\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=l$

<u>Définition 2</u> (nombe dérivé) :

Soit f une fonction et a un point de son ensemble de définition.

Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction $\tau : h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle l en zéro ; le réel l est appelé <u>le nombre dérivé</u> de f en a et il est noté $f'(a)$,

On a : écrit : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

<u>Remarque</u> : dans le §1 si d est dérivable en t_0 alors la vitesse instantanée est $v(t_0)=d'(t)$.

Définition 3 (dérivabilité sur un intervalle) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de cet intervalle. Si f est dérivable en tout point a de I alors, on dit qu'elle est dérivable sur I.

Application 1 : Calculer un nombre dérivé à partir de la définition.

Dans chaque cas, a est un réel donné ; démontrer que la fonction est dérivable en a et donner son nombre dérivé en a.

a) f est définie sur IR par $g(x) = 5x^2 - 7x + 13$ avec $a = -1$ Réponse $g'(-1) = -17$
b) g est définie sur IR-{-1} par $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ avec $a = 1$

Application 2 :

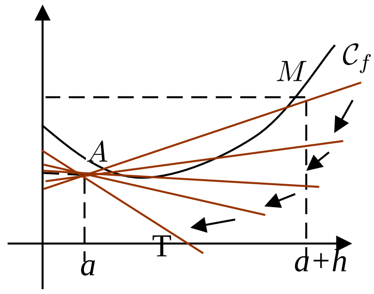
a) Calculer $f'(a)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en tout point a non nul. En déduire $f'(2)$.
b) Prouver que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$.
c) Étudier la dérivabilité de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ en tout point de a, positif ou nul.

2. Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Approche :
Tracer $f(x) = x^2$ sur la ***calculatrice***
Faire un zoom au point d'abscisse 2.
Déterminer alors l'équation de la droite qui approche au mieux $\mathcal{C}_f$

f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a de I.

Dans un repère, $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative. $A(a; f(a))$.
et $M(a+h; f(a+h))$ avec $h \neq 0$ sont deux points de $\mathcal{C}_f$.
Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers le nombre $f'(a)$.



Et graphiquement la droite (AM) a pour « position limite » la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

<u>Définition 4</u> (tangente) :

Soit f une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. La tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(a, f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation est : $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.

<u>Preuve:</u>

L'équation réduite de la tangente en $A(a, f(a))$ s'écrit $y = f'(a)x + p$.
Or le point $A(a, f(a))$ appartient à la tangente et vérifie donc l'équation.
D'où $p = f(a) - f'(a) \times a$.
La tangente a donc pour équation $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.