Les fonctions dérivées

1. Dérivation sur un intervalle – fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction Df son ensemble de définition, I un intervalle ou une réunion d'intervalles inclus dans Df.

Une fonction f est **dérivable sur I** si et seulement si f admet un nombre dérivé en tout point de I.

La fonction qui à tout x de I, associe $f'(x)$, s'appelle **fonction dérivée de** f **et se note** f'**.**

Conséquence : Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.

1. Dérivées usuelles

La fonction f:	$f'(x)$	**Intervalle I**
$x \mapsto k$; k *réel*	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto mx + p$	$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, n *entier naturel*	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$(x \mapsto \frac{1}{x^n})$	$(x \mapsto)$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto cosx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$

Preuves :

- Pour $f(x) = k$, on a pour tout nombre réel a et h non nul : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$
- Pour $f(x) = x$, on a pour tout nombre réel a et h non nul : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$
- Pour $f(x) = x^2$, on a pour tout nombre réel a et h non nul :
  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h$: et $\lim_{h\to 0} 2a + h = 2a$

- La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2$.

Pour tout $a\in\mathbb{R}$, et $h\neq 0$,

$$d(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h}$$

$$=\frac{h(3a^2+3ah+h^2)}{h}=3a^2+3ah+h^2$$

$$\lim_{h\to 0}d(h)=3a^2=f'(a)$$

En remplaçant a par x, on obtient le résultat énoncé, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2$.

- La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$.

Pour tout $a\in\mathbb{R}^*$, et $h\neq 0$,

$$d(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{1}{h}\times\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

$$\lim_{h\to 0}d(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(a+h)h}=\frac{-1}{a^2}$$

On obtient le résultat en remplaçant a par x.

- La fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$.

Pour a>0,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\right)=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{(\sqrt{a+h})^2-(\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\right)=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Pour tout a>0, $f'(a)$ est un réel qui vaut $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Ainsi la fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$.

En remplaçant a par x, on obtient le résultat.

2. Opération sur les fonctions dérivables

On considère deux fonctions u et v dérivables sur I, un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Théorème 1 :
La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$

Preuve:

Calculons le taux d'accroissement $d(h)$ entre a et $a+h$ pour la fonction $u+v$.

$$d(h) = \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{(u)(a+h)-(u)(a)}{h} + \frac{(v)(a+h)-(v)(a)}{h}$$

En prenant la limite quand h tend vers 0 membre à membre on a:

$$\lim_{h \to 0} d(h) = (u+v)'(a) = u'(a) + v'(a).$$

On reconnait en effet les deux taux d'accroissement de u et de v.

Théorème 2 :
La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$

Preuve :

Calculons le taux d'accroissement $d(h)$ entre a et $a+h$ pour la fonction uv.

$$d(h) = \frac{uv(a+h)-uv(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a)$$

En prenant la limite quand h tend vers 0 membre à membre on a:

$$\lim_{h \to 0} d(h) = (uv)'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a).$$

On reconnait les deux taux d'accroissement de u et de v.

Théorème 3 :
On suppose ici que, pour tout réel a de I, $v(a) \neq 0$
Les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$ et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Preuve :

Soit un point a de D fixé.

Puisque v est dérivable en a,

Puisque $v(a) \neq 0$, $v(a+h) \neq 0$ pour tout h suffisamment proche de zéro.

Soit $d(h) = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}\right)$

$$d(h) = \frac{1}{h}\left(\frac{v(a) - v(a+h)}{v(a)v(a+h)}\right) = \frac{-1}{v(a)v(a+h)}\left(\frac{v(a) - v(a+h)}{h}\right)$$

Et ainsi $\lim_{h\to 0} d(h) = -\frac{v'(a)}{v^2(a)}$

Ceci prouve que $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en a et que $\left(\frac{1}{v(a)}\right)' = -\frac{v'(a)}{v^2(a)}$

Ceci étant pour tout a de I, $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur Iet $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Pour $\dfrac{u}{v}$, il suffit d'écrire sous la forme $u \times \frac{1}{v}$ et d'utiliser le théorème 2 et ce qui vient d'être démontré.

> Théorème 4 (admis)
>
> Soit a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax+b$ soit dans I.
>
> La fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur J et, pour tout réel x de J, $f'(x) = au'(ax+b)$

En résumé

Fonction	**Dérivée**	**Fonction composée**
ku (k réel)	ku	Si $f(x) = u(ax+b)$ et si u est dérivable en $ax+b$ alors $f'(x) = au'(ax+b)$
$u+v$	$u+v$	
uv	$uv+uv$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	