Nombre dérivé -2

Dérivation sur un intervalle – Fonction dérivée

Définition :
Soit f une fonction définie sur D_f son ensemble de définition et I un intervalle ou une réunion d'intervalles inclus dans D_f.
Une fonction f est **dérivable sur I** si et seulement si f admet un nombre dérivé en tout point de I.
La fonction qui à tout x de I, associe $f'(x)$, s'appelle **fonction dérivée de f et se note f'.**

Conséquence : Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$. Et en remplaçant a par x, on obtient la fonction dérivée

Dérivées usuelles

La fonction f	***La fonction dérivée f'***	**Intervalle de dérivabilité**
$x \mapsto k$; k réel	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto mx + p$	$x \mapsto m$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, n *entier naturel*	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto -\frac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ (inutile)	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$

Démonstrations :
Pour $f(x) = k$, on a pour tout nombre réel a et h non nul : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$
Pour $f(x) = x$, on a pour tout nombre réel a et h non nul : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$
Pour $f(x) = x^2$, on a pour tout nombre réel a et h non nul :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h$ et $2a + h$ tend vers $2a$ quand h tend vers 0.